Dowód nie wymierności liczby $\sqrt[n]{m}$ podany na wykładzie działą jedynie dla $n = 2$. Dla większych liczb naturalnych ta metoda w prosty sposób nie daje wyniku (w każdym razie ja dziś nie umiem tego poprawić — coś mi się rano wydało i opowiedziałem Państwu bez przemyślenia). Błąd w dowodzie polegał na tym, że o liczbie $\sqrt[n]{m^{n-1}}$ nie wiadomo, że po pomnożeniu jej przez liczbę k otrzymamy całkowity wynik, niestety. (k oznaczało najmniejszą taką liczbę naturalną, że $k \cdot \sqrt[n]{m}$ jest liczbą naturalną).

Dla $n = 2$ rozumowanie jest poprawne, ale ponieważ nakręciłem na wykładzie, więc powtarzam je poniżej starając się trzymać tych oznaczeń, których użyłem w trakcie zajęć.

Twierdzenie
Jeśli m jest dodatnią liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{m}$ jest całkowita lub niewymierna.

Dowód. Załóżmy, że $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna $\tilde{k}$, że liczba $\tilde{k} \cdot \sqrt{m}$ jest całkowita. Niech k będzie najmniejszą ze wszystkich liczb $\tilde{k}$. Wiemy więc, że $k \cdot \sqrt{m}$ jest liczbą naturalną. Niech ℓ oznacza liczbę naturalną, dla której spełniona jest nierówność $\ell < \sqrt{m} < \ell+1$ — ℓ to największa z liczb całkowitych mniejszych od $\sqrt{m}$, druga nierówność jest ostra, bo założyliśmy, że $\sqrt{m} \notin \mathbb{N}$. Niech $k_0 = k(\sqrt{m} - \ell)$. Ponieważ $\ell < \sqrt{m} < \ell + 1$, więc $0 < \sqrt{m} - \ell < 1$, zatem $0 < k_0 = k(\sqrt{m} - \ell) < k$. Mamy też $k_0 \cdot \sqrt{m} = k \cdot m - k \cdot \ell \cdot \sqrt{m} = km - \ell(k\sqrt{m}) \in \mathbb{Z}$, bo iloczyn i różnica liczb całkowitych są liczbami całkowitymi. W rzeczywistości $k_0 \in \mathbb{N}$, bo k_0 jest **dodatnią** liczbą całkowitą. Udało się więc wskazać liczbę całkowitą $k_0 < k$, która po pomnożeniu przez $\sqrt{m}$ jest całkowita, wbrew temu, że liczb o tej własności mniejszych od k nie ma. Dowód został zakończony. ■

Podam teraz dowód niewymierności liczby $\sqrt[n]{m}$ przy założenie, że nie jest ona całkowita. Jednak tym razem wykorzystam pojęcie liczby pierwszej i twierdzenie, o jednoznaczości rozkładu na czynniki pierwsze.

.

Twierdzenie
Jeżeli $m > 0$ jest liczbą całkowitą, która nie jest n–potęgą żadnej liczby całkowitej, to liczba $\sqrt[n]{m}$ jest niewymierna.

Dowód. Załóżmy, że $\sqrt[n]{m} = \frac{p}{q}$, gdzie q i r są liczbami naturalnymi przy czym ułamek $\frac{q}{r}$ jest nieskracalny, czyli liczby q, r nie ma wspólnego dzielnika pierwszego. Wtedy $mr^n = q^n$. Jeśli jakaś jakaś liczba pierwsza jest dzielnikiem liczby r, to jest dzielnikiem lewej strony ostatnio wypisanej równości, więc jest dzielnikiem prawej strony, czyli liczby q^n, a stąd wynika, że p jest dzielnikiem q. Przeczy to temu, że liczby r i q nie mają wspólnego dzielnika pierwszego. Dowód został zakończony. ■