Kilka granic i zadań

Zamieściłem tu kilka uzupełnień do wykładu. Tylko część z nich jest w skrypcie.. Niektóre dowody powtórzyłem, by ułatwić czytanie zainteresowanym.

Przypominam, że zachodzi

Twierdzenie D.1

Dla każdego $x < 1$ prawdziwa jest nierówność $1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{1-x}$. $\blacksquare$

Wobec tego

Wniosek D.2

Dla każdego $x < \frac{1}{2}$ zachodzi nierówność $0 \le e^x - (1 + x) \le 2x^2$. $\blacksquare$

Nierówność z twierdzenia D1 można przetłumaczyć na język logarytmów:

Twierdzenie D.3

Dla każdego $x > -1$ zachodzi nierówność $\frac{x}{1+x} \le \ln(1 + x) \le x$.

Dowód. Dla każdego $x > -1$ nierówności $1 + x \le e^x$ i $\ln(1 + x) \le x$ są równoważne, więc druga też jest prawdziwa. Jeśli $0 \ge x > -1$, to $\frac{x}{1+x} \le 0 < 1$. Jeśli $x > 0$ to $\frac{x}{1+x} < 1$, bo wtedy licznik tego ułamka jest mniejszy od mianownika. Wykazaliśmy zatem, że jeśli $x > -1$, to $\frac{x}{1+x} < 1$. Wynika stąd, że $e^{x/(1+x)} \le \frac{1}{1-\frac{x}{1+x}} = 1 + x$. Wobec tego $\frac{x}{1+x} \le \ln(1 + x)$. $\blacksquare$

Wniosek D.4

Dla każdego $x > -\frac{1}{2}$ zachodzi nierówność $0 \le x - \ln(1+x) \le x - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \le 2x^2$. $\blacksquare$

Twierdzenie D.5

Jeśli $\forall_n x_n \ne 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = 1$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^p-1}{x_n} = p$,

Dowód. Z wniosku D.2 wynika, że $0 \le \left|\frac{e^x-1}{x} - 1\right| = \left|\frac{e^x-(1+x)}{x}\right| \le 2|x|$. Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika wzór 1.

Z wniosku D.4 wynika, że $0 \le \left|\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right| = \left|\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right| \le 2|x|$. Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika wzór 2.

Z otrzymanych równości i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy wynika, że jeśli $p \ne 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + x_n)^p - 1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{p\ln(1+x_n)} - 1}{p\ln(1 + x_n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{p\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1 \cdot p = p\,.$$

Dla $p = 0$ równość 3 jest oczywista. Dowód został zakończony. ■

Przykład D.1 Dla każdej liczby rzeczywistej q zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^{q}-1\right)=1\,.$$

Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}=0$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^{q}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^{q}-1\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^{q}-1}{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}}\cdot\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\ln n}\right]=$$

$=1+1\cdot q\cdot 1\cdot 0=1$. Udowodniliśmy wzór zgodnie z zamierzeniem. ■

Przykład D.2 Zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=\frac{e}{2}$. W jej dowodzie skorzystamy z twierdzenia Stolza. Mamy $n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)=\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\frac{1}{n}}$. Ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest ściśle malejący i zbieżny do 0, a ciąg $\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$ — zbieżny do 0, więc wolno stosować twierdzenie Stolza. Mamy znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-\left(e-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\frac{1}{n(n+1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\left(\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}-1\right)\text{‘}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\left(\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)\left(\tfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\left(\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)\left(1-\tfrac{1}{(n+1)^2}\right)^{n}-1\right).$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, więc wystarczy dowieść, że

$$\lim_{n\to\infty} n(n+1)\left(\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)\left(1-\tfrac{1}{(n+1)^2}\right)^{n}-1\right)=\tfrac{1}{2}\,.$$

Oznaczmy $x=\frac{1}{n+1}$. Wtedy $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n}-1=(1+x)\left(1-x^2\right)^{n}-1=$ $=(1+x)(1-nx^2+\binom{n}{2}x^4-\binom{n}{3}x^6+\binom{n}{4}x^8-\binom{n}{5}x^{10}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n})-1$. Ponieważ $0<x<1$, $\binom{n}{k}\le n^k$ i $nx=\frac{n}{n+1}<1$, więc zachodzą nierówności
$\left|\binom{n}{4}x^8-\binom{n}{5}x^{10}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}\right|\le n^4x^8+n^5x^{10}+\ldots+n^nx^{2n}\le$
$\le x^4+x^5+\ldots+x^n<(n-3)x^4=\frac{n-3}{(n+1)^4}<\frac{1}{(n+1)^3}$. Bez trudności stwierdzamy, że też $\binom{n}{3}x^6\le n^3x^6<x^3=\frac{1}{(n+1)^3}$. Z tych oszacowań wynika, że
$0\le n(n+1)\left|-\binom{n}{3}x^6+\binom{n}{4}x^8-\binom{n}{5}x^{10}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}\right|\le\frac{n(n+1)}{(n+1)^3}+\frac{n(n+1)}{(n+1)^3}<\frac{2}{n+1}$,

więc $\lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)\left(-\binom{n}{3}x^6+\binom{n}{4}x^8-\binom{n}{5}x^{10}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}\right)=0\,.$

Poszukiwana granica jest więc równa $\lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)\left((1+x)(1-nx^2+\binom{n}{2}x^4)-1\right)=$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)\left(x-nx^2-nx^3+\binom{n}{2}x^4+\binom{n}{2}x^5\right)=$

$\overset{x(n+1)=1}{=\!=\!=\!=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-n^2\frac{1}{n+1}-n^2\frac{1}{(n+1)^2}+n\binom{n}{2}\frac{1}{(n+1)^3}+n\binom{n}{2}\frac{1}{(n+1)^4}\right)=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)-n^2}{n+1}-\frac{n^2}{(n+1)^2}+\frac{n^2(n-1)}{2(n+1)^3}+\frac{n^2(n-1)}{2(n+1)^4}\right)=$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n^2}{(n+1)^2}+\frac{n^2(n-1)}{2(n+1)^3}+\frac{n^2(n-1)}{2(n+1)^4}\right)=1-1+\frac12+0=\frac12\,.$

Zakończyliśmy w ten sposób dowód równości $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e-\left(1+\frac1n\right)^n\right)=\frac{e}{2}\,.$

Dodać należy, że po rozwinięciu teorii będziemy w stanie to rozumowanie zastąpić innym, nieco krótszym, prowadzącym do dokładniejszych rezultatów. ■

Przykład D.3 Niech $a_n=\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=-\frac12\,.$

Mamy bowiem

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{e^n n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}-1\right)=$$

$$n\left(\frac{(n+1)^n}{e\,n^n}-1\right)=-\frac1e\cdot n\left(e-(1+\tfrac1n)^n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}-\frac12\,.$$ ■

Z rezultatu opisanego w ostatnim przykładzie i kryterium Raabego wynika od razu, że szereg $\sum\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$ jest rozbieżny, a z rezultatu opisanego w przykładzie D.1 wynika, że szeregi postaci $\sum\frac{1}{n(\ln n)^p}$ nie reagują na kryterium Raabego, niezależnie od tego czy są zbieżne czy też nie.