Kilka zadań wstępnych

Zadanie 1.1 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Zadanie 1.2 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Zadanie 1.3 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\tfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\tfrac{1}{n(n+1)}=1-\tfrac{1}{n+1}.$$

Zadanie 1.4 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Zadanie 1.5 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\tfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\tfrac{1}{18}-\tfrac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Zadanie 1.6 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Zadanie 1.7 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

Zadanie 1.8 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 2$ zachodzi wzór:
$$\left(1-\tfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3^2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\tfrac{1}{n^2}\right)=\tfrac{n+1}{2n}.$$

Zadanie 1.9 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór:
$$\tfrac{1}{5\cdot 8}+\tfrac{1}{8\cdot 11}+\tfrac{1}{11\cdot 14}+\cdots+\tfrac{1}{(3n+2)(3n+5)}=\tfrac{n}{5(3n+5)}.$$

Zadanie 1.10 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>2$ i dla każdej liczby rzeczywistej $a>0$ zachodzi nierówność: $(1+a)^n>1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$.

Zadanie 1.11 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>2$ zachodzi nierówność: $2^{n(n-1)/2}>1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n$.

Zadanie 1.12 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n>1$ zachodzi nierówność: $(n+1)^n>2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2n$.

Zadanie 1.13 Udowodnić, że n prostych na płaszczyźnie, z których każde dwie mają punkt wspólny, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli tę płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$części.

Zadanie 1.14 Niech $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$, itd., p_n jest n–tą liczbą pierwszą. Dowieść, że $p_n>3n$ dla $n\geq 12$.

Zadanie 1.15 Na okręgu obrano $n > 2$ punktów i każdy połączono odcinkiem każdym innym. Czy można wykreślić te odcinki jednym ciągiem tak, by koniec pierwszego był początkiem drugiego, koniec drugiego — początkiem trzeciego itd. i żeby przy tym koniec ostatniego odcinka był początkiem pierwszego.

Zadanie 1.16 Niech $\pi(n)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od liczby naturalnej n. Udowodnić, że $\pi(n) \leq \frac{n}{2}$ dla $n \geq 8$.

Zadanie 1.17 Załóżmy, że liczby x_1, x_2, ... ,x_n mają ten sam znak oraz że $x_1 > -1$, $x_2 > -1$, ... , $x_n > -1$. Dowieść, że

$$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

Zadanie 1.18 Udowodnić, że jeśli suma liczb dodatnich jest równa n, to ich iloczyn jest nie jest większy niż 1.

Zadanie 1.19 Udowodnić, że szachownicę wymiaru $(4k + 1) \times (4k + 1)$ można obejść ruchem skoczka szachowego przechodząc dokładnie jeden raz przez każde pole.

Zadanie 1.20 Niech $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3, \dots, F_{n+2} = =F_{n+1}+F_n$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

Zadanie 1.21 Na dworze króla Artura zebrało się $2n$ rycerzy. Żaden z nich nie ma więcej niż $n-1$ wrogów wśród nich. Udowodnić, że Merlin — doradca króla Artura — może ich rozsadzić przy Okrągłym Stole tak, by żaden nie był sąsiadem swego wroga.

Zadanie 1.22 Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $1000^n - 1$ jest podzielna przez 37.

Zadanie 1.23 Udowodnić, że 7 jest dzielnikiem liczby $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

Zadanie 1.24 Udowodnić, że 13 jest dzielnikiem liczby $1000^n+(-1)^n$ dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie 1.25 Niech $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Dowieść, że $a_n \geq 2^n$ dla $n = 1, 2, \dots$

Zadanie 1.26 Ile zer ma na końcu liczba 1 000 000!?

Zadanie 1.27 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.28 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ dla dowolnych $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.29 $|a| \leq c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-c \leq a \leq c$.

Zadanie 1.30 $|a + b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geq 0$.

Zadanie 1.31 Jeśli $|a-b| \le a$, to $ab \ge 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

Zadanie 1.32 Jeśli $x+y+z=1$, to $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{3}$.

Zadanie 1.33 Jeśli $ab>0$, to $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$.

Zadanie 1.34 $x^2+x+1>0$ i $x^4+x^3+x^2+x+1>0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.35 $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.36 Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x+1|<7$?

Zadanie 1.37 Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x+1|>7$?

Zadanie 1.38 Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x+2|+|x-6|=8$?

Zadanie 1.39 Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x+2|+|x-2| \le 9$?

Zadanie 1.40 Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left|\frac{x+1}{x+2}\right|>1$?

Zadanie 1.41 Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left|\frac{x-4}{x^2+x+5}\right|>1$?

Zadanie 1.42 Niech $\max(a,b)$ oznacza większą z liczb a,b, $\min(a,b)$ — mniejszą z nich, $\max(a,a)=a=\min(a,a)$. Dowieść, że $\max(a,b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$. Wyrazić podobnie $\min(a,b)$.

Zadanie 1.43 Udowodnić, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x>y\ge 0$, $x,y \in \mathbb{R}$ to $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}<\sqrt[n]{x-y}$.

Zadanie 1.44 Udowodnić, że liczba $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ nie jest całkowita dla żadnej liczby naturalnej $n>1$.

Zadanie 1.45 Udowodnić, że jeśli $n \ge 3$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2-4}$ jest niewymierna.

Zadanie 1.46 Udowodnić, że $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=4$.

Zadanie 1.47 Udowodnić, że $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[kn]{a}$.

Zadanie 1.48 Niech n będzie liczbą naturalną, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — liczbami naturalnymi. Dowieść, że $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Zadanie 1.49 Udowodnić, że następujące liczby są niewymierne:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5},\quad \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}.$$

Zadanie 1.50 Udowodnić, że jeśli $n \ge 2$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2+3n}$ jest niewymierna.

Zadanie 1.51 Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich trójek dodatnich liczb wymiernych x, y, z, że $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Zadanie 1.52 Znaleźć taki wielomian f (możliwie niskiego stopnia), że dla każdej liczby $x \neq 0$ zachodzi równość $f\big(x + \frac{1}{x}\big) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Zadanie 1.53 Naszkicować wykres funkcji $|x + 3| - |x - 1|$.

Zadanie 1.54 Znaleźć taki wielomian w pierwszego stopnia, że $w(x) \notin \mathbb{Z}$ dla $x \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 1.55 Znaleźć wielomian w pierwszego stopnia, którego wykres przechodzi przez dokładnie jeden punkt o obu współrzędnych całkowitych.

Zadanie 1.56 Udowodnić, że jeśli wykres wielomianu pierwszego stopnia przechodzi przez dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych, to przechodzi przez nieskończenie wiele takich punktów.

Zadanie 1.57 Udowodnić, że jeśli dla dowolnych $a_1, a_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(a_1x_2+a_2x_2) = a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$, to funkcja f jest wielomianem stopnia nie większego niż 1.

Zadanie 1.58 Rozwiązać równanie $x^2 = \lfloor x \rfloor$.

Zadanie 1.59 Udowodnić, korzystając ewentualnie z twierdzenia Pitagorasa, że proste $y = ax$ i $y = Ax$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $aA = -1$.

Zadanie 1.60 Zbiór wszystkich punktów (x, y), dla których spełniona jest równość $5x - 12y + 13 = 0$, jest prostą. Udowodnić, że odległość punktu $(2, 3)$ od tej prostej, czyli minimum odległości punktu $(2, 3)$ od punktów prostej, jest równa $\frac{|5\cdot 2-12\cdot 3+13|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$.

Zadanie 1.61 Znaleźć liczby b i c wiedząc, że każda z nich jest pierwiastkiem równania $x^2 + bx + c = 0$.

Zadanie 1.62 Dla jakich liczb rzeczywistych m suma pierwiastków równania
$$x^2 - mx + m(m + 3) = 0$$
jest mniejsza o 3 od ich iloczynu?

Zadanie 1.63 Dla jakich liczb całkowitych k oba pierwiastki równania
$$kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$$
są wymierne?

Zadanie 1.64 Dla jakich liczb rzeczywistych m jeden z pierwiastków równania
$$2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$$
jest dwa razy większy od drugiego?

Zadanie 1.65 Dowieść, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, to
$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

Zadanie 1.66 Rozwiązać równanie $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$.

Zadanie 1.67 Udowodnić, że jeśli równość $ax^2+bx+c=Ax^2+Bx+C$ zachodzi dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$, to $a=A$, $b=B$ i $c=C$.

Zadanie 1.68 Dowieść, że prosta może mieć z parabolą 0, 1 lub 2 punkty wspólne i nie może mieć ich więcej.

Zadanie 1.69 Dla jakich wartości parametru $k\in\mathbb{R}$ rzeczywiste pierwiastki równania $x^4-(3k+2)x^2+k^2=0$ tworzą ciąg arytmetyczny? Liczby rzeczywiste $a_1,a_2,\ldots,a_n$ tworzą ciąg arytmetyczny, jeżeli $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}$.

Zadanie 1.70 Dowieść, że środki wszystkich tych odcinków równoległych do prostej $y=2x-5$, których oba końce leżą na paraboli o równaniu $y=2x^2-13x+7$, znajdują się na jednej prostej. Czy każdy punkt tej prostej jest środkiem jednego z opisanych odcinków?

Zadanie 1.71 Wykazać, że jeśli suma odległości punktu (x,y) od punktów $(0,\sqrt{5})$ i $(0,-\sqrt{5})$ jest równa 6, to $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Czy z tego, że $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ wynika, że suma odległości punktu (x,y) od punktów $F_1=(0,\sqrt{5})$ i $F_2=(0,-\sqrt{5})$ jest równa 6?

Zadanie 1.72 Wykazać, że jeśli $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, to stosunek odległości punktu (x,y) od punktu $F_1=(0,\sqrt{5})$ do odległości punktu (x,y) od prostej $y=\frac{9}{\sqrt{5}}$ jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Zadanie 1.73 Wykazać, że jeśli $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, to stosunek odległości punktu (x,y) od punktu $F_1=(0,\sqrt{13})$ do odległości punktu (x,y) od prostej $y=\frac{9}{\sqrt{13}}$ jest równy $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

Zadanie 1.74 Wykazać, że $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ wtedy i tylko wtedy, gdy wartość bezwzględna różnicy odległości punktu (x,y) od punktów $F_1=(0,\sqrt{13})$ i $F_2=(0,-\sqrt{13})$ jest równa $2\sqrt{13}$.

Zadanie 1.75 Dowieść, że środki wszystkich tych odcinków równoległych do prostej $y=2x-5$, których oba końce leżą na elipsie o równaniu $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, znajdują się na jednej prostej. Czy każdy punkt tej prostej jest środkiem jednego z opisanych odcinków?
Znaleźć wszystkie proste równoległe do prostej $y=2x-5$, które mają dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Zadanie 1.76 Niech $F_1=(0,\sqrt{5})$, $F_2=(0,-\sqrt{5})$ i $A=\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$. Znaleźć prostą ℓ przechodzącą przez punkt A, której jedynym punktem wspólnym z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ jest punkt A. Wykazać, że kąt między odcinkiem F_1A i prostą ℓ równy jest kątowi między odcinkiem F_2A i prostą ℓ.

Zadanie 1.77 Wykazać, że parabole $y = x^2$ i $y = 9x^2$ są podobne.
Dwa zbiory C i D na płaszczyźnie nazywamy podobnymi, jeśli istnieje takie przekształcenie $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i liczba $k > 0$, że stosunek odległości punktów $P(x_1)$ i $P(x_2)$ do odległości punktów x_1 i x_2 jest równy k dla dowolnych różnych punktów x_1, x_2 oraz $P(C) = D$.

Zadanie 1.78 Ile punktów wspólnych z okręgiem może mieć wykres funkcji kwadratowej?

Zadanie 1.79 Ile punktów wspólnych mogą mieć dwie parabole?

Zadanie 1.80 Ile punktów wspólnych mogą mieć: elipsa o równaniu $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4} = 1$ i okrąg o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$?

Zadanie 1.81 Ile pierwiastków ma równanie $x^4 + 2(m-4)x^2 + 4 = 0$ w zależności od parametru m?

Zadanie 1.82 Ile pierwiastków ma równanie $x^4 + (2m-4)x^2 - m^2 + 4m - 2 = =0$, w zależności od parametru m?

Zadanie 1.83 Wykazać, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $x + y = 1$, to zachodzi nierówność: $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$.

Zadanie 1.84 Wyrażenie $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}$ jest stałe na pewnym przedziale. Znaleźć ten przedział.

Zadanie 1.85 Udowodnić, że parabola $y = ax^2+bx+c$ jest zbiorem złożonym z punktów równoodległych od pewnego ustalonego punktu i pewnej ustalonej prostej.
Jest to geometryczna definicja paraboli, ustalony punkt nazywany jest ogniskiem, a prosta — kierownicą.

Zadanie 1.86 Jeśli F jest ogniskiem paraboli $y = ax^2$, d — jej kierownicą, P punktem paraboli, to prosta t — styczna do paraboli w punkcie P jest dwusieczną kąta między prostą PF i prostą pionową przechodząca przez punkt P.
Oznacza to, że jeśli umieścimy „punktowe" źródło światła w ognisku F zwierciadła parabolicznego, tj. otrzymanego w wyniku obrotu paraboli wokół jej osi symetrii, to po odbiciu od zwierciadła otrzymamy wiązkę promieni równoległych. Ta własność paraboli decyduje o tym, że np. anteny radioteleskopów mają kształt paraboliczny.