

1. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} - n\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 1} - n}.$$

Uzasadnić odpowiedź.

2. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right).$$

Uzasadnić odpowiedź.

3. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right).$$

Uzasadnić odpowiedź.

4. Niech $5 \leq a_0$ i $a_{n+1} = a_n^2 - 10a_n + 30$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) ma granicę i znaleźć ją, jeśli istnieje. Wynik może zależeć od a_0 .

5. Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną, a (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych takich, że $a_n \neq 1$, dla każdego n , oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_n^2 + \dots + a_n^k - k}{a_n - 1}.$$

Uzasadnić odpowiedź.