PISEMNE ZADANIA DOMOWE 2016Z SERIA 10
TERMIN ODDANIA: WTOREK 24.01.2017, NA POCZĄTKU ĆWICZEŃ
NA ROZWIĄZANIACH PROSZĘ NAPISAĆ IMIĘ, NAZWISKO ORAZ NUMER INDEKSU

---

1. Niech $f\colon [3,12] \to \mathbf{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że zachodzi równość $f(3) = f(12)$. Udowodnić, że dla pewnego $x \in [3,12]$ zachodzi równość $f(x) = f(2x)$.

2. Wykazać, że jeśli funkcja ciągła jest ściśle wypukła jest i **nie** jest monotoniczna, to ma wartość najmniejszą i ta najmniejsza wartość jest przyjmowana w dokładnie jednym punkcie, przy czym jest to punkt wewnętrzny dziedziny funkcji.
Funkcja **ciągła** $f\colon P \to \mathbf{R}$ *jest ściśle wypukła na przedziale* P *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych różnych punktów* $s,t \in P$ *zachodzi nierówność* $f\left(\frac{s+t}{2}\right) < \frac{f(s)+f(t)}{2}$.

3. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin\sqrt[3]{x}$ jest jednostajnie ciągła.
Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin x^3$ jest jednostajnie ciągła.

4. Rozstrzygnąć czy:
(a) kwadrat funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą;
(b) sześcian funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą.

5. Udowodnić, że jeśli P jest takim przedziałem, że każda funkcja ciągła $f\colon P \to \mathbf{R}$ jest ograniczona, to P jest domknięty i ograniczony.