

1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n > 1$  zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

2. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych  $a, b$  oraz dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 1$  zachodzi nierówność:

$$(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

3. Wykazać, że liczba  $\sqrt{2/3}$  jest niewymierna.

4. Znaleźć kres dolny i kres górny następującego zbioru:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5|x| + 4 < 0\}.$$

Uzasadnić odpowiedzi.

5. Niech  $A$  i  $B$  będą niepustymi zbiorami liczb rzeczywistych dodatnich. Wykazać, że

$$\sup\{\sqrt{ab} : a \in A, b \in B\} = \sqrt{\sup A \cdot \sup B}.$$