Rozwiązania zadań z pierwszej klasówki, 10 listopada 2016 r.

zestaw A

1. Ciąg (a_n) jest zadany rekurencyjnie:
$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a_n-12}{2a_n-9}, \quad a \in \mathbb{R},\ a < 2,$
gdzie a jest parametrem. Wykazać, że
a) $a_n < 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$;
b) ciąg (a_n) jest rosnący;
c) ciąg (a_n) jest zbieżny. Obliczyć jego granicę.

Rozwiązanie. Mamy

$$2 - a_{n+1} = 2 - \frac{a_n - 12}{2a_n - 9} = \frac{3a_n - 6}{2a_n - 9} = \frac{3(a_n - 2)}{2a_n - 9} = \frac{3}{9 - 2a_n}(2 - a_n)\,.$$

Jeśli $a_n < 2$, to $9 - 2a_n > 5$, więc $0 < \frac{3}{9-2a_n} < \frac{3}{5}$, zatem
$$2 - a_n > \tfrac{3}{5}(2 - a_n) > 2 - a_{n+1} > 0$$
i wobec tego $2 > a_{n+1} > a_n$. Udowodniliśmy w ten sposób (łatwiutka indukcja!), że ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony. Jest więc zbieżny. Z otrzymanych nierówności wynika, że $2 \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Mamy

$$g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 12}{2a_n - 9} = \frac{g - 12}{2g - 9}\,,$$

bo granica podciągu jest taka sama jak granica ciągu i spełnione są założenia twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. Spełniona jest więc równość

$$0 = g - \frac{g - 12}{2g - 9} = \frac{2g^2 - 10g + 12}{2g - 9} = \frac{2(g-2)(g-3)}{2g - 9}\,.$$

Z niej wynika, że $g = 2$ lub że $g = 3$, a ponieważ $2 \geqslant g$, więc $g = 2$. $\square$

Uwaga. Gdy już wiemy, że $0 < 2 - a_{n+1} < \frac{3}{5}(2 - a_n)$, to stwierdzić możemy, że
$$0 < 2 - a_n < \left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1}(1 - a_1) = \left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1}(1 - a)$$
dla każdego $n > 1$, zatem $0 < a_n - 2 < \left(\frac{a-12}{2a-9}\right)^{n-1}(2 - a)$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - 2) = 0$. Stąd, z twierdzenia o trzech ciągach i zbieżności do 0 ciągu geometrycznego o ilorazie z przedziału otwartego $(-1, 1)$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}(2 - a_n) = 0$. Nie musimy więc rozwiązywać równania, aby znaleźć granicę. $\square$

2. Niech $A = \left\{\frac{13n+17k}{13k+17n}:\quad n, k \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2016,\ k \geqslant 2017\right\}$. Wyznaczyć kres górny i kres dolny zbioru A.

Rozwiązanie. Mamy $\frac{17}{13} - \frac{13n+17k}{13k+17n} = \frac{(17^2-13^2)n}{13(13k+17n)} > 0$, więc $\frac{17}{13}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A. Żadna mniejsza liczba ograniczeniem górnym nie jest, bo jeśli $\varepsilon > 0$ i $k > \frac{1}{13}\left(\frac{(17^2-13^2)n}{13\varepsilon} - 17n\right)$, to $\frac{17}{13} > \frac{13n+17k}{13k+17n} > \frac{17}{13} - \varepsilon$. Stąd wynika, że $\sup A = \frac{17}{13}$. Dalej $\frac{13n+17k}{13k+17n} - \frac{13}{17} = \frac{(17^2-13^2)k}{17(13k+17n)} > 0$, więc $\frac{13}{17}$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Większego ograniczenia dolnego nie ma, bo jeśli $\varepsilon > 0$ i $n > \frac{1}{17}\left(\frac{(17^2-13^2)k}{17\varepsilon} - 13k\right)$, to $\frac{13}{17} < \frac{13n+17k}{13k+17n} < \frac{13}{17} + \varepsilon$. Wobec tego $\inf A = \frac{13}{17}$.

Uwaga. Można bez trudu udowodnić, że zwiększenie k powoduje wzrost liczby $\frac{13n+17k}{17n+13k}$, a z tego wynika, że w celu znalezienia kresu górnego warto znaleźć $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{13n+17k}{17n+13k}$, a zwiększenie n powoduje zmniejszenie liczby $\frac{13n+17k}{17n+13k}$, więc tym razem warto obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{13n+17k}{17n+13k}$. $\square$

3. Wykazać nierówność $\sqrt[4n]{5} \geqslant 1 + \frac{1}{5n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

Rozwiązanie. Nierówność, którą należy udowodnić jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{\sqrt[4n]{5}} \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{5n-1}} = \frac{5n-1}{5n} = 1 - \frac{1}{5n},$$

a ta nierówności $\frac{1}{5} \leqslant \left(1 - \frac{1}{5n}\right)^{4n}$. Ostatnia wynika z nierówności Bernoulliego: $-\frac{1}{5n} > -1$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, więc $\left(1 - \frac{1}{5n}\right)^{4n} \geqslant 1 + 4n\left(-\frac{1}{5n}\right) = \frac{1}{5}$. $\square$

4. Niech (a_n) będzie takim ciągiem, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n < 0$. Wykazać, że istnieje podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) zbieżny do 0.

Rozwiązanie. Ciąg (a_n) zawiera podciągi (a_{n_ℓ}) i (a_{n_m}) zbieżne do $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ oraz do $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n < 0$, więc istnieje nieskończenie wiele takich n, że $a_n > 0$ i nieskończenie wiele takich n, że $a_n < 0$. Zdefiniujemy teraz liczby $n_1 < n_2 < \ldots$. Niech n_1 oznacza najmniejszy numer wyrazu ciągu (a_n), dla którego $a_n > 0$. Niech n_2 będzie najmniejszą z tych liczb $n > n_1$, dla których $a_n \leqslant 0$. Teraz definiujemy n_3 jako najmniejszą z tych liczb naturalnych $n > n_2$, dla których $a_n > 0$, co pozwala na zdefiniowanie liczby n_4 jako najmniejszej liczby naturalnej $n > n_3$, dla której $a_n \leqslant 0$. Kontynuujemy definiowanie kolejnych n_k. Otrzymujemy ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) przy czym kolejne wyrazy ciągu (a_{n_k})znajdują się po różnych stronach liczby 0 (te o parzystych numerach mogą być równe 0). Ponieważ $a_{n_{2k+1}} > 0$ i $a_{n_{2k+1}-1} \leqslant 0$, więc $0 < a_{n_{2k+1}} \leqslant a_{n_{2k+1}} - a_{n_{2k+1}-1}$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_{2k+1}} = 0$. Podobnie $0 \geqslant a_{n_{2k}} > a_{n_{2k}} - a_{n_{2k}-1}$, więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_{2k}} = 0$. Z twierdzenia o scalaniu wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = 0$, co kończy dowód. $\square$

5. Należy wybrać jedno z zadań: a) lub b).

a) Obliczyć obie granice $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{25n + n^3}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left((3n)! + n^n\right)^{1/n^n}$.

b) Obliczyć obie granice $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}$, $\quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (H_n)^{1/n}$.

Rozwiązanie. a) Mamy $1 \leqslant 25n + n^3 \leqslant 26n^3$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, więc $1 \leqslant \sqrt[n]{25n + n^3} \leqslant \sqrt[n]{26} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^3$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{26} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$, więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{25n + n^3} = 1$.

Mamy $(3n)! < (3n)^{3n}$, bo $(3n)!$ jest iloczynem $3n$ czynników, z których $3n - 1$ to liczby mniejsze od $3n$, a $(3n)^{3n}$ to iloczyn $3n$ czynników równych $3n$. Oczywiście $n^n < (3n)^{3n}$. Wobec tego dla $n > 3$ mamy $1 < (3n)! + n^n \leqslant (3n)^{3n} + (3n)^{3n} = 2 \cdot (3n)^{3n} \leqslant 2 \cdot (n^2)^{3n} = 2 \cdot (n)^{6n}$ Wynika stąd nierówność

$$1 < \sqrt[n^n]{(3n)! + n^n} \leqslant \sqrt[n^n]{2 \cdot n^{6n}} = \sqrt[n^n]{2} \cdot \left(\sqrt[n^n]{n^n}\right)^6,$$

a ponieważ granica podciągu ciągu zbieżnego jest równa granicy ciągu, więc zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^n]{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^n]{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Wobec tego z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^n]{n! + n^{3n}} = 1$.

b) Mamy $1 \leqslant H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant n \cdot 1 = n$. Stąd wynika, że

$$1 \leqslant \sqrt[n]{H_n} \leqslant \sqrt[n]{n},$$

zatem z równości $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{H_n} = 1$.

Ciąg $\left(\sqrt{n+1}\right)$ jest ściśle rosnący. Jego granicą jest $+\infty$, więc można spróbować zastosować twierdzenie Stolza. Mamy $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$. Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+2}}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{n+2-n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n+2}}\right)=2.$$

Wynika to z równości $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$, twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu i tego, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\alpha_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n}$ dla każdego ciągu zbieżnego (α_n) o wyrazach nieujemnych (twierdzenie znane z zajęć). Stąd i z twierdzenia Stolza wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}=2$. □

Uwaga. Bez twierdzenia Stolza też można. Mamy $(\sqrt{k}<\sqrt{k+1})$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=$$
$$=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=2(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})$$

— znieśliśmy pracowicie niewymierność w mianownikach. A teraz oszacujemy z góry

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$$
$$=2\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=2\sqrt{n+1}-1.$$

Mamy więc $2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{2(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})}{\sqrt{n+1}}<\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}<\frac{2\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}=2-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Z otrzymanej nierówności i z twierdzenia o trzech ciągach oraz z twierdzeń z zajęć równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}=2$$

wynika od razu. □

1. Ciąg (a_n) jest zadany rekurencyjnie:
$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a_n-12}{2a_n-9}, \quad a \in \mathbb{R}, 2 < a < 3,$
gdzie a jest parametrem. Wykazać, że
a) $2 < a_n < 3$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$;
b) ciąg (a_n) jest malejący;
c) ciąg (a_n) jest zbieżny. Obliczyć jego granicę.

Rozwiązanie. Mamy

$$a_{n+1} - 2 = \frac{a_n - 12}{2a_n - 9} - 2 = \frac{-3a_n + 6}{2a_n - 9} = \frac{3(-a_n + 2)}{2a_n - 9} = \frac{-3}{2a_n - 9}(a_n - 2)\,.$$

Jeśli $2 < a_n < 3$, to $-5 < 2a_n - 9 < -3$, więc $\frac{3}{5} < \frac{-3}{2a_n-9} < 1$, zatem
$$0 < \tfrac{3}{5}(a_n - 2) < a_{n+1} - 2 < a_n - 2$$
i wobec tego $2 < a_{n+1} < a_n < 3$. Udowodniliśmy w ten sposób (łatwiutka indukcja!), że ciąg (a_n) jest malejący i ograniczony. Jest więc zbieżny. Z otrzymanych nierówności wynika, że $2 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n < a_1 < 3$. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Mamy

$$g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 12}{2a_n - 9} = \frac{g - 12}{2g - 9}\,,$$

bo granica podciągu jest taka sama jak granica ciągu i spełnione są założenia twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. Spełniona jest więc równość

$$0 = g - \frac{g - 12}{2g - 9} = \frac{2g^2 - 10g + 12}{2g - 9} = \frac{2(g - 2)(g - 3)}{2g - 9}\,.$$

Z niej wynika, że $g = 2$ lub że $g = 3$, a ponieważ $2 \leqslant g < a_1 < 3$, więc $g = 2$. $\square$

Uwaga. Gdy już wiemy, że $2 < a_n < a_{n-1} < \ldots < a_1 = a < 3$, to stwierdzić możemy, że $\frac{3}{5} < \frac{-3}{2a_n-9} \leqslant \frac{a-12}{2a-9} < 1$ dla każdego $n > 0$, zatem $0 < a_n - 2 < \left(\frac{a-12}{2a-9}\right)^{n-1}(2 - a)$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - 2) = 0$ — z twierdzenia o trzech ciągach i zbieżności do 0 ciągu geometrycznego o ilorazie z przedziału otwartego $(-1, 1)$. Nie musimy więc rozwiązywać równania, aby znaleźć granicę. $\square$

2. Niech $A = \left\{\frac{15n+13k}{15k+13n} : \quad n, k \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2016,\ k \geqslant 2017\right\}$. Wyznaczyć kres górny i kres dolny zbioru A.

Rozwiązanie. Mamy $\frac{15}{13} - \frac{15n+13k}{15k+13n} = \frac{(15^2-13^2)k}{13(15k+13n)} > 0$, więc $\frac{15}{13}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A. Żadna mniejsza liczba ograniczeniem górnym nie jest, bo jeśli $\varepsilon > 0$ i $n > \frac{1}{13}\left(\frac{(15^2-13^2)k}{13\varepsilon} - 15k\right)$, to $\frac{15}{13} > \frac{15n+13k}{15k+13n} > \frac{15}{13} - \varepsilon$. Stąd wynika, że $\sup A = \frac{15}{13}$. Dalej $\frac{15n+13k}{15k+13n} - \frac{13}{15} = \frac{(15^2-13^2)n}{15(15k+13n)} > 0$, więc $\frac{13}{15}$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Większego ograniczenia dolnego nie ma, bo jeśli $\varepsilon > 0$ i $k > \frac{1}{15}\left(\frac{(15^2-13^2)n}{15\varepsilon} - 13n\right)$, to $\frac{13}{15} < \frac{15n+13k}{15k+13n} < \frac{13}{15} + \varepsilon$. Wobec tego $\inf A = \frac{13}{15}$.

Uwaga. Można bez trudu udowodnić, że zwiększenie n powoduje wzrost liczby $\frac{15n+13k}{15k+13n}$. Stąd wynika, że w celu znalezienia kresu górnego warto znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{15n+13k}{15k+13n}$. Zwiększenie k powoduje zmniejszenie liczby $\frac{15n+13k}{15k+13n}$, więc tym razem warto obliczyć $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{15n+13k}{15k+13n}$. $\square$

3. Wykazać nierówność $\sqrt[2n]{3} \geqslant 1 + \frac{1}{3n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

Rozwiązanie. Nierówność, którą należy udowodnić jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{\sqrt[2n]{3}} \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{3n-1}} = \frac{3n-1}{3n} = 1 - \frac{1}{3n}\,,$$

a ta nierówności $\frac{1}{3} \leqslant \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n}$. Ostatnia wynika z nierówności Bernoulliego: $-\frac{1}{3n} > -1$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, więc $\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} \geqslant 1 + 2n\left(-\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3}$. □

4. Niech (a_n) będzie takim ciągiem, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n < 0$. Wykazać, że istnieje podciąg (a_{n_k}) ciągu (a_n) zbieżny do 0.

Rozwiązanie. Ciąg (a_n) zawiera podciągi (a_{n_ℓ}) i (a_{n_m}) zbieżne do $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ oraz do $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n < 0$, więc istnieje nieskończenie wiele takich n, że $a_n > 0$ i nieskończenie wiele takich n, że $a_n < 0$. Zdefiniujemy teraz liczby $n_1 < n_2 < \ldots$. Niech n_1 oznacza najmniejszy numer wyrazu ciągu (a_n), dla którego $a_n > 0$. Niech n_2 będzie najmniejszą z tych liczb $n > n_1$, dla których $a_n \leqslant 0$. Teraz definiujemy n_3 jako najmniejszą z tych liczb naturalnych $n > n_2$, dla których $a_n > 0$, co pozwala na zdefiniowanie liczby n_4 jako najmniejszej liczby naturalnej $n > n_3$, dla której $a_n \leqslant 0$. Kontynuujemy definiowanie kolejnych n_k. Otrzymujemy ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) przy czym kolejne wyrazy ciągu (a_{n_k})znajdują się po różnych stronach liczby 0 (te o parzystych numerach mogą być równe 0). Ponieważ $a_{n_{2k+1}} > 0$ i $a_{n_{2k+1}-1} \leqslant 0$, więc $0 < a_{n_{2k+1}} \leqslant a_{n_{2k+1}} - a_{n_{2k+1}-1}$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_{2k+1}} = 0$. Podobnie $0 \geqslant a_{n_{2k}} > a_{n_{2k}} - a_{n_{2k}-1}$, więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_{2k}} = 0$. Z twierdzenia o scalaniu wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = 0$, co kończy dowód. □

5. Należy wybrać jedno z zadań: a) lub b).

a) Obliczyć obie granice $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n + 2n^2}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(n! + n^{3n}\right)^{1/n^n}$.

b) Obliczyć obie granice $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)^{1/n}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Rozwiązanie. a) Mamy $2n^2 = 2 \cdot n \cdot n < 2^n \cdot 2^n \cdot 2^n = 8^n < 10^n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, bo $2^n \geqslant 1 + n$ — nierówność Bernoulliego. Wobec tego zachodzą nierówności

$$10 < \sqrt[n]{10^n + 2n^2} < \sqrt[n]{10^n + 10^n} = 10\sqrt[n]{2}\,.$$

Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n + 2n^2} = 10$.

Mamy $1 < n! + n^{3n} \leqslant n^{3n} + n^{3n} = 2 \cdot n^{3n}$, bo $n!$ jest iloczynem n czynników, z których $n-1$ to liczby mniejsze od n, a n^{3n} to iloczyn $3n$ czynników równych n. Wobec tego mamy

$$1 < \sqrt[n^n]{n! + n^{3n}} \leqslant \sqrt[n^n]{2 \cdot n^{3n}} = \sqrt[n^n]{2} \cdot \left(\sqrt[n^n]{n^n}\right)^3\,,$$

a ponieważ granica podciągu ciągu zbieżnego jest równa granicy ciągu, więc zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^n]{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^n]{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ i wobec tego z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^n]{n! + n^{3n}} = 1$.

b) Mamy $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} < n \cdot 1 = n$. Stąd wynika, że

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}} < \sqrt[n]{n}\,,$$

zatem z równości $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}}=1$.

Ciąg $(\sqrt{n})$ jest ściśle rosnący. Jego granicą jest $+\infty$, więc można spróbować zastosować twierdzenie Stolza. Mamy $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}\right)=2.$$

Wynika to z równości $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu i tego, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\alpha_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n}$ dla każdego ciągu zbieżnego (α_n) o wyrazach nieujemnych (twierdzenie znane z zajęć). Stąd i z twierdzenia Stolza wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=2$. $\Box$

Uwaga. Bez twierdzenia Stolza też można. Mamy $(\sqrt{k}<\sqrt{k+1})$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$$
$$=2\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=2(\sqrt{n+1}-1)$$

— znieśliśmy pracowicie niewymierność w mianownikach. A teraz oszacujemy z góry

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=$$
$$=1+2\left(\sqrt{2}-1+\ldots\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=2\sqrt{n}-1.$$

Udowodniliśmy, że $2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}}<\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}<\frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}=2-\frac{1}{\sqrt{n}}$. Z otrzymanej nierówności i z twierdzenia o trzech ciągach oraz z twierdzeń z zajęć równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=2$$

wynika od razu. $\Box$