AM1.1 — funkcje ciągłe

1. Dowieść, że jeśli $c_n, c_n' \in \{0,2\}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n'}{3^n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to zachodzi równość $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n'}{2^{n+1}}$. Niech $f\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}}$. Dowieść, że funkcja f, zdefiniowana w zbiorze Cantora $\mathfrak{C}$, jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny i przekształca ją **na** przedział domknięty $[0,1]$.
Zbiór Cantora składa się z tych wszystkich punktów przedziału $[0,1]$*, które mogą być zapisane w postaci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$*, gdzie* $c_n \in \{0,2\}$*, czyli tych liczb, które w układzie trójkowym można zapisać bez użycia cyfry* 1*.*

2. Podać przykład ograniczonej funkcji ciągłej określonej na półprostej $[0,\infty)$, która nie jest jednostajnie ciągła.

3. Podać przykład ograniczonej funkcji ciągłej $f\colon (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

4. Dowieść, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem domkniętym (tzn. zawierającym wszystkie swoje punkty skupienia) i ograniczonym, to każda funkcja ciągła $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest ograniczona, osiąga swe kresy i jest jednostajnie ciągła.

5. Dowieść, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem, który nie zawiera choćby jednego swego skończonego punktu skupienia, to istnieje funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona ani z góry ani z dołu i nie jest jednostajnie ciągła.

6. Dowieść, że każda funkcja ciągła $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathfrak{C}$ jest stała.

7. Dowieść, że jeśli każda funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ma własność przyjmowania wartości pośrednich, tzn. jeśli liczba C znajduje się między liczbami $f(x)$ i $f(y)$, to istnieje takie $c \in A \cap (x,y)$, że $C = f(c)$, to zbiór A jest przedziałem.

Definicja. Mówimy, że funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $x \in P$ *funkcja* $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ *jest niemalejąca na zbiorze* $P \setminus \{x\}$*.*

8. Dowieść, że każda funkcja wypukła $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Podać przykład funkcji wypukłej $f\colon [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma punkt nieciągłości.

9. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest nieciągła w punkcie 0 i ma własność Darboux (przyjmowania wartości pośrednich).

10. Niech P będzie dowolnym przedziałem, C, α liczbami dodatnimi a $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ taką funkcją, że dla dowolnych $s, t \in P$ zachodzi nierówność $|f(s) - f(t)| \leqslant C|s-t|^\alpha$. Dowieść, że f jest jednostajnie ciągła.

11. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych $s, t \in P$ zachodzi nierówność $|f(s) - f(t)| \leqslant |s-t|^2$.

12. Załóżmy, że $(a_n)_{n=0}^\infty$ i $(b_n)_{n=0}^\infty$ są takimi ciągami, że dla pewnej liczby $x_0 \neq 0$ szeregi $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n x_0^n$ i $\sum\limits_{n=0}^\infty b_n x_0^n$ są zbieżne. Udowodnić, że jeśli istnieje taki ciąg (x_j) liczb różnych od 0 zbieżny do 0, że $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n x_j^n = \sum\limits_{n=0}^\infty b_n x_j^n$ dla $j = 1, 2, \ldots$, to $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

13. Dowieść, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n$ jest zbieżny, to funkcja dana wzorem $f(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n x^n$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(-1, 1]$.

14. Udowodnić, że jeśli funkcje $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, to funkcje $\max(f, g)$ i $\min(f, g)$ zdefiniowane wzorami $\max(f, g)(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$ i analogicznie $\min(f, g)(x) = \min\big(f(x), g(x)\big)$ też są ciągłe.

15. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma dokładnie jeden punkt ciągłości.

16. Udowodnić, że istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona na żadnym przedziale.

17. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Dowieść, że istnieje funkcja niemalejąca $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której jedynymi punktami nieciągłości są liczby a_1, a_2, a_3, $\ldots$

18. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją ciągłą w co najmniej jednym punkcie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

19. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją monotoniczną, że równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ma miejsce dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

20. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją ograniczoną na przedziale (-1,1), że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ ma miejsce równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

21. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \colon \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie takie funkcje
$$f \colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$
że $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $f(1) = 1$.
Uwaga: w zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ wykonalne są cztery działania arytmetyczne, mianowicie dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od 0.

22. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) := \{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6} \colon \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f \colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, re $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ i $f(1) = 1$.

23. Dowieść, że jeśli wielomian v nie ma pierwiastków rzeczywistych i stopień wielomianu w nie jest większy niż stopień wielomianu v, to iloraz $\frac{w}{v}$ jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}$,

24. Dowieść, że jeśli funkcja f jest ciągła, to funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

25. Dowieść, że dla każdego wielokąta wypukłego istnieje prosta, która dzieli jednocześnie obwód i pole wielokąta na połowy.

26. Dowieść, że na brzegu każdego wielokąta wypukłego leżą cztery punkty, które są wierzchołkami pewnego kwadratu.

27. Niech $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, a $c \in (0, 1)$ taką liczbą, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ jest spełniona nierówność $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $x_0 \in \mathbb{R}$, dla której zachodzi równość $f(x_0) = x_0$.

28. Podać przykład takiej funkcji $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że jeśli $x \neq y$, to $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(x) > x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

29. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, obraz $f([a, b])$ przedziału $[a, b]$ jest przedziałem o długości $b - a$.

30. Niech $C \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym (tzn, zawierającym wszystkie swoje skończone punkty skupienia) i ograniczonym a $f \colon C \longrightarrow C$ — funkcją niemalejącą. Udowodnić, że $f(p) = p$ dla pewnego punktu $p \in C$.

31. Niech $f \colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że dla każdej liczby $x > 0$ zachodzi równość $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = 0$. Udowodnić, że $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

32. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ dla $x \notin \{1,2\}$ oraz $f(1) = f(2) = 0$.

33. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2x^2-3x+1}$ dla $x \notin \{1, \frac{1}{2}\}$ oraz $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

34. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$.

35. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{gdy} x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{p}{q+1}, & \text{gdy} \quad x = \frac{p}{q}, q \geqslant 1,\ p, q \in \mathbb{Z}, \mathrm{NWD}(p,q) = 1. \end{cases}$$

36. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli g jest funkcją Riemanna i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x) = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)g(x)$.