Kilka granic funkcji

Zacznę od przypomnień.

Definicja punktu skupienia zbioru.
Punkt $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ jest punktem skupienia zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg (a_n), że $a_n \in A \setminus \{a\}$ i $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. $\square$

Definicja granicy funkcji.
Niech p oznacza dowolny punkt skupienia dziedziny funkcji f. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy gdy dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do p, o wyrazach różnych od p, zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$. $\square$

Zadania

1. Znaleźć wszystkie punkty skupienia zbiorów:
$\{0,1,2,3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}\cap(0,1)$, $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(0,1)$, $\{1+(-1)^n+\frac{1}{n}:\quad n=1,2,\ldots\}$.

2. Znaleźć następującą granicę lub wykazać, że poszukiwana granica nie istnieje:

a. $\lim\limits_{x\to0} \lfloor -x^2 \rfloor$,
b. $\lim\limits_{x\to0} x^n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$,
c. $\lim\limits_{x\to0} x^{-2} = 0$,
d. $\lim\limits_{x\to0} x^{-3} = 0$,
e. $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$,
f. $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, tu $m,n \in \mathbb{N}$,
g. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x+x^2)(13+x)(257+x^7)}{(2x+271)^{10}}$,
h. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x)(6+x)(11+x)(17+x)(24+x)}{(x^2+x+1)^3}$
i. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{x^3-6x^2+11x-6}$,
j. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^5-3x^4+x^3+13x^2-7x-30}{x^5+2x^4-5x^3-10x^2+4x+8}$,
k. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^{257}-257x+256}{(x-1)^2}$,
l. $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$, tu $m,n \in \mathbb{N}$,
m. $\lim\limits_{x\to-32} \frac{\sqrt{17-x}-7}{2+\sqrt[5]{x}}$
n. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

3. Niech $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ f(x) = 1, & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Dowieść, że funkcja f nie ma granicy w żadnym punkcie.

4. Niech $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & \text{gdy} \quad x = \frac{p}{q}, \quad \text{gdzie} \quad q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z},\ \mathrm{nwd}(p,q) = 1. \end{cases}$

Dowieść że $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$ dla każdego $p \in \mathbb{R}$.

5. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie granicę 0, to istnieje taka liczba niewymierna a, że $f(a) = 0$.

6. Dowieść, że nie istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego rzeczywistego a zachodzi równość $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

7. Podać przykład takich dwu funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$ oraz

(a) $\lim\limits_{x\to0} f(x)\cdot g(x) = 0$,
(b) $\lim\limits_{x\to0} f(x)\cdot g(x) = -13$,
(c) $\lim\limits_{x\to0} f(x)\cdot g(x) = \infty$,
(d) $\lim\limits_{x\to0} f(x)\cdot g(x) = -\infty$,
(e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)\cdot g(x)$ nie istnieje.