Wspomnienia z ćwiczeń i kilka zadań

Zajmowaliśmy się szeregiem dwumianowym: $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Jeśli a jest liczbą naturalną, to szereg ten jest zbieżny dla każdej liczby rzeczywistej x, to od pewnego momentu wszystkie jego wyrazy są zerami. Jeśli a nie jest liczbą naturalną i $x \neq 0$, to $\binom{a}{n}x^n \neq 0$, więc można zbadać jego zbieżność bezwzględną za pomocą kryterium ilorazowego (d'Alemberta). Mamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{a}{n+1}x^{n+1}}{\binom{a}{n}x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(a-n)x}{n+1}\right| = |x|$. Wynika stąd, że ten szereg jest zbieżny bezwzględnie dla $x \in (-1,1)$, natomiast jeśli $|x| > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\binom{a}{n}x^n\right| = +\infty$, zatem wyraz szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ nie dąży do 0, więc ten szereg jest rozbieżny. Odkładamy kwestię zbieżności szeregu dla $x = \pm 1$ na później.

Od tego momentu zakładamy, że $|x| < 1$. Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy oba szeregi $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n$ są bezwzględnie zbieżne, więc ich iloczyn Cauchy'ego też jest zbieżny bezwzględnie. Wyraz tego iloczynu wygląda tak:

$$\binom{a}{0}x^0\cdot\binom{b}{n}x^n + \binom{a}{1}x^1\cdot\binom{b}{n-1}x^{n-1} + \binom{a}{2}x^2\cdot\binom{b}{n-2}x^{n-2} + \ldots + \binom{a}{n-1}x^{n-1}\cdot\binom{b}{1}x^1 + \binom{a}{n}x^n\cdot\binom{b}{0}x^0 =$$
$$= \left(\binom{a}{0}\cdot\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\cdot\binom{b}{n-1} + \binom{a}{2}\cdot\binom{b}{n-2} + \ldots + \binom{a}{n-1}\cdot\binom{b}{1} + \binom{a}{n}\cdot\binom{b}{0}\right)x^n.$$

Jeśli $a > n$ i $b > n$ są liczbami naturalnymi, to z klasycznego wzoru dwumianowego i równości $(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b}$ otrzymujemy, porównując współczynniki przy x^n po obu stronach równości, następujący związek:

(1) $$\binom{a}{0}\cdot\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\cdot\binom{b}{n-1} + \binom{a}{2}\cdot\binom{b}{n-2} + \ldots + \binom{a}{n-1}\cdot\binom{b}{1} + \binom{a}{n}\cdot\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}.$$

Udowodnimy, że równość (1) zachodzi dla każdej pary liczb rzeczywistych. Jej stronę można potraktować jako wielomian n–tego stopnia zmiennej a przy ustalonym naturalnym b. Prawa strona też jest wielomianem n–tego stopnia zmiennej a. Wtedy różnica obu stron też jest wielomianem stopnia nie większego od n. Każda liczba naturalna większa od n jest jego pierwiastkiem. Wielomian, który ma nieskończenie wiele pierwiastków to wielomian zerowy, a to oznacza, że równość (1) zachodzi dla każdej liczby naturalnej b i dowolnej liczby rzeczywistej (a nawet zespolonej) a. Teraz ustalamy $a \in \mathbb{R}$. Obie strony dowodzonej równości są wielomianami stopnia n zmiennej b. I znów każda liczba naturalna $b > n$ jest pierwiastkiem ich różnicy, co oznacza, że różnica jest wielomianem zerowym, zatem równość (1) zachodzi dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b. Stąd natychmiast wynika, że

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n$$

dla każdej liczby $x \in (-1,1)$ i dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$.

Oczywiście równość (1) można udowodnić inaczej, np. przez indukcję względem n.

Niech $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$. Wiemy, że $f(a+b) = f(a)f(b)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b. Oprócz tego wiemy, że $f(1) = 1 + x > 0$. Stąd w szczególności wynika, że $f(a) > 0$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$. Udowodnimy teraz, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1 = f(0)$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, więc dla dostatecznie dużych n spełniona jest nierówność $|a_n| < 1$. Niech $a \in (-1,1)$. Wtedy $\left|\binom{a}{n}\right| = \left|\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n}\right| \leqslant |a|\cdot\frac{(1+|a|)(2+|a|)\ldots(n-1+|a|)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n} \leqslant |a|$. Wynika stąd, że $|f(a)-1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\right| \leqslant |a|\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n = |a|\frac{|x|}{1-|x|}$. Z nierówności $|f(a_n)-1| \leqslant |a_n|\frac{|x|}{1-|x|}$ natychmiast wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}|f(a_n)-1| = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$, co obiecaliśmy wykazać.

Z twierdzenia charakteryzującego funkcję wykładniczą wynika, znanego z wykładu, teraz, że $f(a)=f(1)^a=(1+x)^a$, czyli

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n=1+\frac{a}{1}x+\frac{a\cdot(a-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\dots\,. \tag{3}$$

Przypomnę, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{h_n}-1}{h_n}=1$. Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x)^{h_n}-1}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{h_n\ln(1+x)}-1}{h_n\ln(1+x)}\ln(1+x)=\ln(1+x)\,. \tag{4}$$

Mamy też $\frac{(1+x)^a-1}{a}=\frac{1}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}$. Udowodnię, że

$$\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\,. \tag{5}$$

Niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią. Mamy, podobnie jak jak nieco wyżej (około 10 wierszy), $\left|\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}\right|\leqslant|x|^n$. Stąd wynika, że dla każdego $a\in(-1,1)$ zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}\right|\leqslant\sum_{n=m+1}^{\infty}|x|^n=\frac{|x|^{m+1}}{1-|x|}\,.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^n=0$, więc istnieje takie $m\in\mathbb{N}$, że $\frac{|x|^{m+1}}{1-|x|}<\frac{\varepsilon}{3}$ (każda dostatecznie duża liczba m spełnia ten warunek). Wobec tego

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\left|\sum_{n=0}^{m}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|+\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}\right|+\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|<$$
$$<\left|\sum_{n=0}^{m}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|+\frac{2\varepsilon}{3}.$$

Ponieważ dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi równość $\lim\limits_{a\to 0}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}=(-1)^n\frac{x^n}{n}$, więc z twierdzenia o granicy sumy wynika (mamy teraz do czynienia z sumą $m+1$ składników!), że istnieje taka liczba $\delta\in(0,1)$, że jeśli $|a|<\delta$, to $\left|\sum\limits_{n=0}^{m}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. Możemy więc napisać, że jeśli $|a|<\delta$, to

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|<\varepsilon\,.$$

Stąd wynika równość (5), a z niej i z równości (4) wynika, że

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}\,.$$

Otrzymaliśmy kolejny wzór przedstawiający ważną i często używaną funkcję w postaci sumy szeregu. Wiemy już więc, że dla każdego $x\in\mathbb{R}$ spełnione są równości

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$

zaś dla każdego $x\in(-1,1)$ mamy

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n},\qquad (1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\,.$$

Na następnej stronie kilka zadań.

Zadania

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu:

1. $(-1)^n \frac{n+1}{(n+2)\sqrt{n}}$,
2. $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$,
3. $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$,
4. $(-1)^n\,(\sqrt[n]{n}-1)$,
5. $(-1)^n\,(\sqrt[n]{a}-1)$,
6. $(-1)^n\left(\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2\right)$,
7. $(-1)^n\left(\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n\right)$;
8. $(-1)^n\,(e-(1+1/n)^n)$
9. $\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)...(1+x^n)}$

2. Dowieść, że szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a>-1$.

3. Dowieść, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (b_n) zbieżnego do 0 szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

4. Niech $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = b_n$. Wykazać, że iloczyn szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$ jest rozbieżny.

5. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_n^2$?

6. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich wynika zbieżność szeregu $\sum a_n^2$?

7. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum a_n^3$?

8. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich wynika zbieżność szeregu $\sum a_n^3$?

9. Dowieść, że jeśli $|x| \le \frac{1}{2}$, to $\left|\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}\right| < 0{,}005$.

10. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}$ jest zbieżny? Jeśli tak, to czy bezwzględnie?

11. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ jest zbieżny?

12. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ jest zbieżny?

13. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\sin n\cdot\sin n^2$ jest zbieżny?

14. Dla jakich x szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nx)$ jest zbieżny?

15. Dla jakich x szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos(nx)$ jest zbieżny?

16. Czy prawdą jest, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum b_n$ jest zbieżny?