# AM1.1 — zadania 6

*Ostatnia poprawka o godz 13:28 (18 listopada 2015 r.)*

Ta seria ma trochę inny charakter. Tym razem są tu łatwe zadania, które powinni Państwo rozwiązać jak najszybciej.

*Przypomnienie:*
Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geqslant 1 + x$.
Dla każdej liczby rzeczywistej $x < 1$ zachodzi nierówność $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$, więc $1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-X}$.
Dla każdej liczby rzeczywistej $x > -1$ zachodzi nierówność podwójna $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. $\square$

**1**. Udowodnić, że jeśli $x, y \leqslant M$, to $|e^x - e^y| \leqslant L|x - y|$, gdzie $L = e^M$.

**2**. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n} = e^x$.

**3**. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n} = \infty$.

**4**. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n} = 0$.

**5**. Dowieść, że jeśli $x, y \geqslant c > 0$, to $|\ln x - \ln y| \leqslant L|x - y|$, gdzie $L = \frac{1}{c}$.

**6**. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in (0, \infty)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x$.

**7**. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \infty$.

**8**. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i $x_n > 0$ dla każdego $n$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = -\infty$.

**9**. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in (-\infty, \infty]$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$ — przyjmujemy, że $e^\infty = \infty$.

**10**. Podać przykład takiego ciągu $(x_n)$, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ i ciąg o wyrazie $\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n$ nie ma granicy.

**11**. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in (0, \infty)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = x^y$.

**12**. Wskazać takie dwa ciągi $(x_n)$, $(y_n)$, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \frac{3}{7}$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 1$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \frac{7}{3}$,
(e) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \infty$, (f) ciąg o wyrazie $x_n^{y_n}$ nie ma granicy.

**13**. Zastanowić się nad ciężkim losem biednego studenta, który chce zdefiniować potęgę $1^\infty$.

**14**. Zastanowić się nad ciężkim losem biednego studenta, który chce zdefiniować symbole $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{0}$.