AM1.1 — zadania 3

1. Niech $x \in \mathbb{R}$, $a_0 = 0$ i $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x^2 - a_n^2)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to dla każdego $x \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność $0 \leqslant |x| - a_n < \varepsilon$.

2. Ile osi symetrii ma czworościan foremny?

3. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli ta granica istnieje, gdy $a_n =$

a. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n+13}$; **b.** $\frac{1+n+3n+n^2}{n^2-n+13}$;
c. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n^8+13}$; **d.** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
e. $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$; **f.** $\sqrt{1+2^{(-1)^n}}$;
g. $\sqrt[n]{1^k + 2^k + \cdots + n^k}$, $k \in \mathbb{N}$; **h.** $\sqrt[n]{n}$;
i. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; **j.** $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3-n+13}$; .
k. $\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$; **l.** $\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;
m. $\frac{n}{2^n}$; **n.** $\frac{n^{13}}{2^n}$;
o. $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$, $|q| < 1$; **p.** nq^n, $|q| < 1$;
r. $1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}$, $|q| < 1$.

4. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona równa 0.

5. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona równa 0.

6. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona skończona.

7. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona skończona.

8. Niech $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... Wykazać, ze ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

9. Wykazać, że
a. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$; **b.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}\right)^n = 1$.

10. Wykazać, że
a. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) < \infty$; **b.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n < \infty$;

11. Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

12. Wykazać, że jeśli ciąg (a_n) zawiera takie dwa podciągi $(a_{n'_k})$ i $(a_{n''_k})$ zbieżne do tej samej granicy g, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest wyrazem co najmniej jednego z tych dwóch podciągów, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.[1]

13.* Wyrazy ciągu a_n są nieujemne. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n spełniona jest nierówność $a_{m+n} \leq a_m + a_n$. Wykazać, że ciąg o wyrazie $\frac{a_n}{n}$ ma skończoną granicę.

[1] Twierdzenie sformułowane w tym zadaniu autor tego tekstu lubi nazywać twierdzeniem o scalaniu.

14. Niech $a_1 > 0$ i $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

15. Niech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ i $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

16. Niech $a_0 = 9$, $a_1 = 27$ i $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}a_{n+1}$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) jest jest zbieżny. Jeśli ma granicę, znaleźć ją.

17. Niech c będzie liczbą dodatnią. Niech $a_1 = \sqrt{c}$ i niech $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

18. Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Niech $a_1 = b$ i niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$. Wykazać, że istnieją takie liczby dodatnie c i $q \in (0, 1)$, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $\left|a_n - \sqrt{a}\right| < cq^{2^n}$. Wskazać konkretną parę liczb c, q w przypadku $a = 5$ i $b = 3$.
Można wywnioskować stąd, że ciąg a_n jest bardzo szybko zbieżny do liczby $\sqrt{a}$, np. że liczba dokładnych cyfr liczby $\sqrt{a}$ przy zastąpieniu a_n przez a_{n+1} co najmniej podwaja się (dla dostatecznie dużych n, przy czym w przypadku $a = 5$, $b = 3$ jest tak nieomal od samego początku).

19. Wykazać, że jeśli $g > 0$ jest liczbą niewymierną, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = g$, to zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

20. Załóżmy, że ciąg (a_n) nie jest ograniczony z góry, ani z dołu oraz że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taki ściśle rosnący ciąg (n_m), że $x = \lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}$, czyli: każda liczba rzeczywista x jest granicą pewnego podciągu ciągu (a_n).