

## AM1.1 — zadania 2

1. Znaleźć kresy górny i dolny zbioru  $A$ , jeśli  $A =$ :

- (a)  $\left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ;
- (b)  $\left\{ \frac{(m+n)^2}{2mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ;
- (c)  $\left\{ \frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R} \right\}$ ;
- (d)  $\left\{ \frac{1}{x^4+1} : x \in \mathbb{R} \right\}$ ;
- (e)  $\left\{ \frac{x^2+x+1}{3x^2+8} : x \in \mathbb{R} \right\}$ ;
- (f)  $\left\{ x^2 + (xy - 1)^2 : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ .

2. Udowodnić, że jeśli  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  są niepustymi zbiorami, to

- (a)  $\sup\{a + b : a \in A, b \in B\} = \sup A + \sup B$ ;
- (b)  $\inf\{a + b : a \in A, b \in B\} = \inf A + \inf B$ ;
- (c)  $\sup\{a - b : a \in A, b \in B\} = \sup A - \inf B$ ;
- (d)  $\inf\{a - b : a \in A, b \in B\} = \inf A - \sup B$ ;
- (d)  $\inf\{a - b : a \in A, b \in B\} = \inf A - \sup B$ ;
- (e)  $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ ;
- (f)  $\sup\{a \cdot b : a \in A, b \in B\} = \max(\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B)$ ;
- (g)  $\left\{ \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (h)  $\left\{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (i)  $\left\{ \sqrt[n]{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (j)  $\left\{ \frac{n^{100}}{1,01^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (k)  $X = \left\{ \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} + \frac{a}{d+a+b} : a, b, c, d > 0 \right\}$ .

3. Niech  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x^2 - a_n^2)$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Znaleźć kresy zbioru  $\{a_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

4. Znaleźć  $\sup\{x \cdot y : x + y = 4, x \in [0, 4], y \in [0, 4]\}$ .

5. Znaleźć  $\sup\{xyz : x + y + z = 6, x, y, z \in [0, 6]\}$ .