**AM1.1 — zadania 1**

**1**. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi wzór:
$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

**2**. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi wzór:
$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

**3**. Załóżmy, że liczby $x_1$, $x_2$, $\ldots$ ,$x_n$ mają ten sam znak oraz że $x_1 > -1$, $x_2 > -1$, $\ldots$ , $x_n > -1$. Dowieść, że $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

**4**. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ i dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ zachodzi nierówność: $(1+a)^n > 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$.

**5**. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ zachodzi nierówność:
$2^{n(n-1)/2} > 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

**6**. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność:
$(n+1)^n > 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n$.

**7**. Udowodnić, że $n$ prostych na płaszczyźnie, z których każde dwie mają punkt wspólny, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli tę płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$części.

**8**. Niech $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, itd., $p_n$ jest $n$–tą liczbą pierwszą. Dowieść, że $p_n > 3n$ dla $n \geq 12$.

**9**. Na okręgu obrano $n > 2$ punktów i każdy połączono odcinkiem każdym innym. Czy można wykreślić te odcinki jednym ciągiem tak, by koniec pierwszego był początkiem drugiego, koniec drugiego — początkiem trzeciego itd. i żeby przy tym koniec ostatniego odcinka był początkiem pierwszego.

**10**. Niech $\pi(n)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych od liczby naturalnej $n$. Udowodnić, że $\pi(n) \leq \frac{n}{2}$ dla $n \geq 8$.

**11**. Udowodnić, że jeśli suma liczb dodatnich jest równa $n$, to ich iloczyn jest nie jest większy niż 1.

**12**. Udowodnić, ze szachownicę wymiaru $(4k+1) \times (4k+1)$ można obejść ruchem skoczka szachowego przechodząc dokładnie jeden raz przez każde pole.

**13**. Niech $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $\ldots$, $F_{n+2} = =F_{n+1} + F_n$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n$ zachodzi równość $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

**14**. Na dworze króla Artura zebrało się $2n$ rycerzy. Żaden z nich nie ma więcej niż $n-1$ wrogów wśród nich. Udowodnić, że Merlin — doradca króla Artura — może ich rozsadzić przy Okrągłym Stole tak, by żaden nie był sąsiadem swego wroga.

**15**. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $1000^n - 1$ jest podzielna przez 37.

**16**. Udowodnić, że 7 jest dzielnikiem liczby $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

**17**. Udowodnić, że 13 jest dzielnikiem liczby $1000^n + (-1)^n$ dla każdej liczby naturalnej $n$.

**18**. Udowodnić, że dla każdych liczb dodatnich $a, b$ i dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność: $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}$. .

**19** $a^2 + b^2 \geq ab$ *dla dowolnych* $a, b \in \mathbb{R}$.

***20*** $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ *dla dowolnych* $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

***21***. $|a| \leq c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-c \leq a \leq c$.

**22**. $|a + b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geq 0$.

**23**. Jeśli $|a - b| \leq a$, to $ab \geq 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

**24**. Jeśli $x + y + z = 1$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

**25**. Jeśli $ab > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

**26**. $x^2 + x + 1 > 0$ i $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

**27**. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 1| < 7$?

**28**. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 1| > 7$?

**29**. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 2| + |x - 6| = 8$?

**30**. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 2| + |x - 2| \leq 9$?

**31**. Niech $\max(a, b)$ oznacza większą z liczb $a, b$, $\min(a, b)$ — mniejszą z nich, $\max(a, a) = a = \min(a, a)$. Dowieść, że $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$. Wyrazić podobnie $\min(a, b)$.

**32**. Niech $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Definiujemy dodawanie, mnożenie i nierówność wzorami (elementy zbioru $\mathbb{Z}_3$ to reszty z dzielenia przez 3) $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $0 + 2 = 2 + 0 = 2$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 2 + 1 = 0$, $2 + 2 = 1$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 2 = 2 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 1$, $0 < 1 < 2 < 0$. Dowieść, że w zbiorze $\mathbb{Z}_3$ działania są łączne, przemienne, mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, istnieją elementy przeciwne, różne od 0 elementy $\mathbb{Z}_3$ mają elementy odwrotne, nierówność jest antysymetryczna, do obu stron nierówności można dodać ten sam element, nierówność można pomn ożyc stronami przez ten sam element większy od 0, ale nierówność nie jest przechodnia. A jak jest w podobnie zdefiniowanych zbiorach $\mathbb{Z}_4$ i $\mathbb{Z}_5$?

**33**. W każde z pól nieskończonej kraty kwadratowej wpisano liczbę naturalną w ten sposób, ze jeśli $a, b, c, d$ są liczbami wpisanymi w pola przyległe do pola, na którym znalazła się liczba $n$, to $a + b + c + d \leq 4n$. Dowieść, że w każde pole wpisano tę samą liczbę naturalną. [1]

**34**. Jaka jest największa liczba punktów, które można umieścić w trójkącie równobocznym o boku 2 w taki sposób, by odległość dowolnych dwóch nie była mniejsza niż 1.

[1] Autorem tego zadania jest prof. dr hab. Maciej Skwarczyński.

**35**. W sali jest $n$ osób. Udowodnić, że w sali są co najmniej dwie osoby mające tyle samo znajomych. Zakładamy tu, że jeśli osoba $O_1$ zna osobę $O_2$, to również $O_2$ zna osobę. $O_1$.

**36**. Ile skoczków można ustawić na szachownicy, jeśli pola na którym znajduje się skoczek nie może szachować inny skoczek.

**37**. Na okręgu danych jest 17 punktów. Każde dwa połączono odcinkiem niebieskim, zielonym lub żółtym. Dowieść, że istnieje trójkąt, którego wszystkie boki są tego samego koloru.

**38**. Spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 199, 200$ wybrano 101. Dowieść, że co najmniej jedna z nich dzieli inną.

**39**. Wykazać, że sześcianu nie można ułożyć z parami różnych sześcianów.

**40**. Niech $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że $a_n \geq 2^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

**41**. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych, które z dzielenia przez 3 dają resztę 1.

**42**. Znaleźć wszystkie takie czwórki liczb całkowitych $w, x, y, z$, że zachodzi równość $w^4 + 2x^4 = 4(y^4 + 2z^4)$.

**43**. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele różnych par $a, b$ liczb całkowitych, dla których $a^2 - 2b^2 = 1$.

**44**. Znaleźć wszystkie takie pary liczb całkowitych $x, y$, że zachodzi równość $xy = x + y$.

**45**. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby $14^{14^{14}}$.

**46**. Udowodnić, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $x > y \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ to $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} < \sqrt[n]{x - y}$.

**47**. Udowodnić, że liczba $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ nie jest całkowita dla żadnej liczby naturalnej $n > 1$.

**48**. Udowodnić, że jeśli $n \geq 3$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2 - 4}$ jest niewymierna.

**49**. Udowodnić, że $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 4$.

**50**. Udowodnić, że następujące liczby są niewymierne:
$\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

**51**. Udowodnić, że jeśli $n \geq 2$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt{n^2 + 3n}$ jest niewymierna.

**52**. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich trójek dodatnich liczb wymiernych $x, y, z$, że $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.