AM1.2 — zadania 18

Poprawiłem 8 czerwca, 20:51

To chyba już ostatnia seria zadań w tym roku, choć nie wiadomo, co przyniesie przyszłość.

214. Zbadać zbieżność całek $\int_0^\infty e^{\cos x}\sin(\sin x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ oraz $\int_0^\infty e^{\sin x}\sin(\sin x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

215. Obliczyć $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

216. Niech $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$ oraz $I_a(b) = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x$. Obliczyć $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}I_a(b)$ lub udowodnić, że ta pochodna nie istnieje (może to zależeć od b).

217. Korzystając z oznaczeń z poprzedniego zadania udowodnić, że $\lim\limits_{a\to 0} I_a(b) = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x$.

218. Czy przypadkiem czystym nie da się korzystając z wyników dwóch poprzednich zadań obliczyć $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x$?

219. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ jest nierosnąca i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, to również $\lim\limits_{h\to 0} h \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(nh) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

220. Udowodnić, że choć funkcja $\frac{\sin x}{x}$ nie spełnia założeń poprzedniego twierdzenia, to jednak $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\pi}{k} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{k}}{n\frac{\pi}{k}}$.
Byłoby interesująco udowodnić tę równość nie korzystając z wiedzy na temat wartości całki...