AM1.2 — zadania 17

Należy wybrać trzy spośród zadań o numerach 209 — 213 i napisać ich rozwiązania na kartkach. Kartki z rozwiązaniami proszę przynieść nie później niż w 62 rocznicę śmierci Alana Turinga (AT: I believe that at the end of the century the use of words and general educated opinion will have altered so much that one will be able to speak of machines thinking without expecting to be contradicted.)

205. Niech a_0, a_1, $\ldots a_n$ będą liczbami całkowitymi, przy czym $a_0 \neq 0 \neq a_n$. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od n i od $|a_0|$. Wreszcie niech

$$w(x) = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdot \ldots \cdot (x-n)^p \quad \text{i} \quad m = \deg w = p(n+1) - 1.$$

Udowodnić, że liczba $a_0\big[w(0)+w'(0)+\cdots+w^{(m)}(0)\big]$ jest niepodzielna przez p i podzielna przez $(p-1)!$, natomiast liczby $a_k\big[w(k)+w'(k)+\cdots+w^{(m)}(k)\big]$ są podzielne przez $p!$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

206. Oznaczenia z poprzedniego zadania. Niech $I_w(x) := \int_0^x e^{x-t}w(t)\mathrm{d}t$. Udowodnić, że dla każdego $x \in [0, n]$ zachodzi nierówność $0 \leqslant I_w(x) \leqslant e^n \cdot n^{p(n+1)}$.

207. Oznaczenia z poprzednich zadań. Udowodnić, że jeśli $a_0 + a_1 e + a_2 p^2 + \ldots + a_n e^n = 0$, to $a_0 I_w(0) + a_1 I_w(1) + a_2 I_w(2) + \ldots + a_n I_w(n)$ jest liczbą całkowitą podzielną, przez $(p-1)!$, ale niepodzielną przez p.

208. Udowodnić, że nie istnieją takie liczby całkowite a_0, a_1, $\ldots a_n$, że $a_0 \neq 0 \neq a_n$ oraz $a_0 + a_1 e + a_2 p^2 + \ldots + a_n e^n = 0$.

209. Obliczyć $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x - \cos\alpha}}$.

210. Udowodnić, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ jest zbieżna, ale że nie jest zbieżna bezwzględnie.

211. Udowodnić, że dla każdego $a > 0$ zachodzi równość $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{d}x$ i wywnioskować stąd, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

212. Wykazać, że całka $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ jest zbieżna.

213. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ korzystając ewentualnie z wzoru na $\sin 2\omega$ i trochę kombinując.