AM1.2 — zadania 16

Zadanie 189 nie jest do napisania, ale należy umieć je rozwiązać w całości.

Należy wybrać cztery spośród zadań o numerach 192, 194 c i d, 196, 197, 200, 201 i napisać ich rozwiązania na kartkach. Kartki z rozwiązaniami proszę przynieść nie później niż w 473 rocznicę śmierci Mikołaja Kopernika (De Revolutionibus Coelestibus If there should chance to be any mathematicians who, ignorant in mathematics yet pretending to skill in that science, should dare, upon the authority of some passage of Scripture wrested to their purpose, to condemn and censure my hypothesis, I value them not, and scorn their inconsiderate judgement.)

.

189. Znaleźć całki

a. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^2}$ *b.* $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$ *c.* $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x \,\mathrm{d}x$

d. $\int x^2 e^{3x} \sin 4x \,\mathrm{d}x$ *e.* $\int \cos^2 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ *f.* $\displaystyle\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}x$

g. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x \,\mathrm{d}x$ *h.* $\int x \ln(1+x^4) \,\mathrm{d}x$ *i.* $\int x^x (1+\ln x) \,\mathrm{d}x$

Definicja. Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest miary 0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie przedziały $I_1, I_2, I_3, \ldots$, że $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$, $|I|$ oznacza długość przedziału $|I|$.

190. Udowodnić, że suma przeliczalnie wielu zbiorów miary 0 jest zbiorem miary 0.

191. Dowieść, że jeśli $I_1, I_2, I_3, \ldots$ są takimi przedziałami, że $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq [0,1]$, to $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geqslant 1$.

192. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ jest klasy C^1 zaś $A \subset [0,1]$ jest zbiorem miary 0, to również zbiór $f(C)$ ma miarę 0.

193. Wykazać, że istnieje taka funkcja ciągła, różnowartościowa $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ i taki zbiór $C \subset [0,1]$ miary 0, że zbiór $f(C)$ ma miarę *dodatnią*.

194. Znaleźć granice

a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

c. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$ oraz $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}$

d. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \sin\frac{\pi}{n^2} + \frac{n+2}{n} \sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n} \sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)$

e. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(nx+j)(nx+j+1)}$

f. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+1/2} + \cdots + \frac{2^{n/n}}{n+1/n}\right)$

g. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\frac{j\pi}{n}}$

195. Wykazać, że złożenie funkcji całkowalnych w sensie Riemanna nie musi być funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Czy wystarczy dodatkowo założyć, że funkcja wewnętrzna jest ciągła? Czy wystarczy dodatkowo założyć, że funkcja zewnętrzna jest ciągła?

196. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$. Można zacząć od funkcji klasy C^1.

197. Wykazać, że jeśli dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość $\int_0^1 f(x)x^n \, \mathrm{d}x = 0$, to funkcja f jest równa 0 prawie wszędzie.

198. Wykazać, że jeśli f jest nieujemną funkcją niemalejącą, wklęsłą, klasy C^2 na półprostej $[1,\infty)$, to ciąg $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ o wyrazie $\displaystyle a_k = \sum_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^k f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} f(k)$ jest ograniczony.

199. Znaleźć pochodną funkcji f, jeśli $f(x) =$

a. $\displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1 + t^2 \sin t} \, \mathrm{d}t$ b. $\displaystyle\int_{x^2}^{7} \sqrt{e^t + \sin(\cos t)} \, \mathrm{d}t$ c. $\displaystyle\int_{x^2}^{x^4} \sqrt{e^{t \sin t} + \cos(\sin t)} \, \mathrm{d}t$

200. Niech f będzie funkcją ciągła na $[0,+\infty)$ i niech $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx) \, \mathrm{d}x$.

201. Znaleźć $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{x^2} \, \mathrm{d}x$.

202. Niech $F(x) = \int_0^x \sin^n t \, \mathrm{d}t$, $G(x) = \int_0^x \cos^n t \, \mathrm{d}t$. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ funkcje F i G są okresowe?

203. Obliczyć $B(k,n) := \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^n \, \mathrm{d}x$ zakładając, że $k, n \geqslant 1$ są całkowite.

204. Niech $P_n = \frac{1}{2^n n!}\Big((x^2-1)^n \Big)^{(n)}$. Obliczyć $\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_k(x) \, \mathrm{d}x$.