AM1.2 — zadania 15

Poprawiłem 25 kwietnia, 14:47

Zadanie 186 nie jest do napisania, ani nie będzie omawiane w czasie ćwiczeń, ale należy umieć je rozwiązać w całości (jest mało ambitne).

Należy wybrać trzy spośród zadań o numerach 138, 139, 145, 147, 154, 182 i 183 napisać ich rozwiązania na kartkach. Kartki z rozwiązaniami proszę przynieść nie później niż w 162 rocznicę urodzin Henri Poincaré (Science is built up with facts, as a house is with stones. But a collection of facts is no more a science than a heap of stones is a house.) .

182. Udowodnić, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1, to istnieje taki ciąg wielomianów (w_n), że $w_n \rightrightarrows f$ i $w_n' \rightrightarrows f'$.

183. Udowodnić, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest granicą punktowo zbieżnego ciągu wielomianów. Czy jest też granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów?

184. Rozstrzygnąć, czy iloczyn funkcji, które mają funkcje pierwotne, też ma funkcję pierwotną.

185. Obliczyć całki $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$ i $\int \frac{x^5}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$

186. Obliczyć $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, jeśli $f(x) =$

a. $x+3x^2-12x^4$	**ą.** $x(1+x^2)^4$	**b.** e^{2x}
c. $\sin 3x$	**ć.** $x\sin(x^2)$	**d.** $\frac{1}{1+4x^2}$
e. $\frac{x}{1+4x^2}$	**ę.** $\frac{1}{1+3x^2}$	**f.** $\frac{1}{2+3x^2}$
g. $\frac{x^2+2x-2}{2+3x^2}$	**h.** $\operatorname{tg} x$	**i.** $\frac{1}{1+2x}$
j. $\frac{x}{1+2x}$	**k.** $\frac{x^2+2x+3}{x+2}$	**l.** $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$
ł. $\frac{x}{(x+1)(x-2)}$	**m.** $\sin x\cos x$	**n.** $\frac{e^x}{1+e^x}$
ń. $x^2\sqrt{x^3-1}$	**o.** $e^{\sqrt{x}}$	**ó.** $x\sin 2x$
p. $x^2\sin x$	**q.** xe^x	**r.** x^2e^{2x}
s. $\operatorname{arctg} x$	**ś.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	**t.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$
u. $\sin^3 x$	**w.** $\frac{1}{\sin^2 x}$	**x.** $\cos x\cdot e^{\sin x}$
y. $\frac{\ln x}{x}$	**z.** $e^x\sin x$	**ż.** $e^{2x}\sin 5x$
ź. $\frac{1}{(1+e^x)^2}$	$\alpha.\ \frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$	$\beta.\ \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$
$\gamma.\ x^2e^{3x}\sin 4x$	$\delta.\ \cos^2\sqrt{x}$	$\varepsilon.\ \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{3/2}}$
$\zeta.\ \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$	$\eta.\ x\ln(1+x^4)$	$\theta.\ x^x(1+\ln x)$

Deser – o zadaniu omówionym na końcu ćwiczeń.

Niech $f_n(x) = \begin{cases} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}x^n(1-x), & \text{gdy} \quad x\in(0,1); \\ 0, \quad \text{gdy} \quad x\notin(0,1). \end{cases}$. Funkcja ta jest nieujemna, największą swą wartość przyjmuje w punkcie $x=\frac{n}{n+1}$, bo to jedyny punkt przedziału $(0,1)$, w którym jej pochodna znika. Oczywiście $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=1$. Bez trudu sprawdzamy, że dla każdego $x\in(0,1)$ zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot(n+1)x^n(1-x) = e\cdot 0\cdot(1-x)=0$. Oczywiście poza przedziałem $(0,1)$ równość też jest prawdziwa. Wobec tego ciąg (f_n) jest punktowo zbieżny do funkcji zerowej, ale ta zbieżność nie jest jednostajna. Niech (a_m,b_m) będą przedziałami

o końcach wymiernych, przy czym każdy przedział o końcach wymiernych, występuje w ciągu $\big((a_m, b_m)\big)$ dokładnie raz. Niech $f_{m,n}(x) = \frac{1}{m} f\big(\frac{x-a_m}{b_m-a_m}\big)$. Jasne jest, że dla każdego ustalonego m i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f_{m,n}(x) = 0$, ale ta zbieżność nie jest jednostajna, bo $\max f_{m,n} = \frac{1}{m}$. Studenci **zechcą udowodnić,** że ciąg funkcyjny
$f_{1,1},\ f_{2,1},\ f_{1,2},\ f_{3,1},\ f_{2,2},\ f_{1,3},\ f_{4,1},\ f_{3,2},\ f_{2,3},\ f_{1,4},\ f_{5,1},\ f_{4,2},\ f_{3,3},\ f_{2,4},\ f_{1,5},\ \ldots$
jest zbieżny punktowo do funkcji zerowej. Oczywiście zbieżność ta nie jest jednostajna na żadnym przedziale (a_m, b_m).
Hipoteza: ten opis jest w swej istocie bardzo podobny do przedstawionego na ostatnich ćwiczeniach (choć może nie wszyscy to od razu zrozumieją), ale mam wrażenie, że prostszy.

187. Udowodnić, że jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mają dodatnie promienie zbieżności oraz $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ i $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, to również funkcję $g \circ f$ można przedstawić w pewnym otoczeniu punktu 0 w postaci sumy szeregu o dodatnim promieniu zbieżności.

188.* Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, przy czym szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ma dodatni promień zbieżności. Udowodnić, że funkcję f^{-1} można przedstawić w postaci sumy szeregu potęgowego o środku w punkcie 0 i dodatnim promieniu zbieżności.