AM1.2 — zadania 14

Tekst poprawiony 24 kwietnia 2016 r.

Zadania 126, 128, 129, 131, 133, 134, 135, 136, 140, 142, 162 i inne z wykrzyknikiem obok numeru są obowiązkowe! Zadania z numerami opatrzonymi gwiazdką można napisać i oddać kiedykolwiek. Inne też należy rozwiązać.

Należy wybrać trzy spośród zadań o numerach 130, 137, 143, 144, 146 i napisać ich rozwiązania na kartkach. Kartki z rozwiązaniami proszę przynieść nie później niż w rocznicę rozpoczęcia powstania w getcie warszawskim (czyli w przedzień urodzin adolfa hitlera).

126.! Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, która ma jednostronne pochodne skończone w każdym punkcie swej dziedziny i której wykres leży nad jednostronną styczną do siebie w każdym punkcie. Udowodnić, że f jest funkcją wypukłą, a jeśli „nad" oznacza ostrą nierówność w każdym punkcie w wyjątkiem punktu styczności — ściśle wypukłą.

127. Czy w poprzednim zadaniu można założyć, że istnieją prawostronne pochodne (zamiast prawo- i lewostronnych)?

128.! Udowodnić, że jeśli (f_n), $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, jest ciągiem funkcji monotonicznych punktowo zbieżnym do funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, to zbieżność jest jednostajna. Czy twierdzenie pozostanie prawdziwe, jeśli przedział domknięty zastąpimy przedziałem otwarto–domkniętym?

129.! Udowodnić, że jeśli (f_n), $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągiem funkcji ciągłych punktowo zbieżnym do funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i dla każdego $x \in [a,b]$ ciąg $(f_n(x))$ jest monotoniczny, to zbieżność jest jednostajna. Czy twierdzenie pozostanie prawdziwe, jeśli przedział domknięty zastąpimy przedziałem otwarto–domkniętym?

130. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych zbieżnego punktowo do funkcji ciągłej f na przedziale $[0,1]$, który nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym podprzedziale domkniętym przedziału $[a,b]$.

131.! Dowieść, że jeśli ciąg wielomianów (w_n) jest jednostajnie zbieżny na przedziale domkniętym do funkcji w i istnieje taka liczba M, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\operatorname{st} w_n \le M$, to funkcja w jest wielomianem, którego stopień nie przekracza M.

132. Niech $\alpha < 0$. Dla jakich liczb rzeczywistych t szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\cos(2\pi nt)$ jest zbieżny? Na jakich zbiorach zbieżność jest jednostajna?

133.! Czy ciąg $nx(1-x)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,1]$?

134. Czy ciąg $\sqrt[n]{1+x^n}$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty)$?

135.! Czy ciąg $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

136.! Czy ciąg $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$?

137.! Czy szereg $\sum \frac{1}{1+(x-n)^2}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

138. Czy szereg $\sum \frac{x^2}{n^4+x^4}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

139. Czy szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty)$?

140.! Dowieść, że każda funkcja przedziałami liniowa jest postaci

$$ax + b + a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \cdots + a_n|x - x_n|.$$

141. Dowieść, że jeśli funkcja f jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych na przedziale domkniętym, to jest też granicą punktowo zbieżnego ciągu wielomianów na tym przedziale.

142. Dowieść, że szereg funkcyjny $x(1-x) - x(1-x) + x^2(1-x) - x^2(1-x) + x^3(1-x) - x^3(1-x) + \cdots$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $[0,1]$. Zmienić kolejność wyrazów tego szeregu tak, by nowy szereg nie był zbieżny jednostajnie na $[0,1]$.

143.! Niech (f_n) będzie ciągiem ciągiem funkcyjnym określonym na przedziale $[a,b]$. Udowodnić, że jest on jednostajnie zbieżny do funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy z równości $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

144. Wykazać, że granica ciągu wielomianów jednostajnie zbieżnego na **całej prostej** jest wielomianem.

145. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ takiego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na przedziale $[0,1]$ i jednocześnie zachodzi równość $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\le x\le 1} |f_n(x)| = +\infty$.

146. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$ dla każdego $x \notin \mathbb{Z}$. Wykazać, że funkcja f jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

147. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x} e^{-n^2 x}$ dla $x \ge 0$. W jakich punktach funkcja f jest ciągła?

148. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$. Wykazać, że funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i wyjaśnić, czy jest okresowa.

149. Udowodnić, że szereg nieujemnych funkcji ciągłych zbieżny punktowo do funkcji ciągłej jest zbieżny jednostajnie.

150. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x}$ dla $x \ge 0$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych.

151.* Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2n^2}$.

152.* Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

153. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{-x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^n}{n!}\right) = a$.

154. Podać przykład takiego ciągu (f_n) funkcji różniczkowalnych na całej prostej, który jest jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej, że ciąg (f_n') jego pochodnych jest zbieżny punktowo do funkcji niezerowej.

155. Dowieść, że funkcja ciągła, nigdzie nieróżniczkowalna, którą została skonstruowana na wykładzie, nie jest monotoniczna na żadnym przedziale.

156. Dowieść, że funkcja ciągła, nigdzie nieróżniczkowalna zdefiniowana w czasie wykładu (van der Waerdena) ma nieskończoną pochodną w co najmniej jednym punkcie.

157. Niech I_1, I_2, ... będą otwartymi przedziałami parami rozłącznymi. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, że $f(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$

158.! Załóżmy, że $-\infty < a < b < c < d < \infty$. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, że $x \notin (a,d) \iff f(x) = 0$, $x \in [b,c] \iff f(x) = 1$

159. Niech $G_1 \subseteq \mathbb{R}$, $G_2 \subseteq \mathbb{R}$, ... będą zbiorami otwartymi (G_n jest otwarty, jeśli dla każdego $x \in G_n$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_n$). Załóżmy, że $G_1 \cup G_2 \cup \ldots = \mathbb{R}$. Udowodnić, że istnieją takie funkcje $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, nieskończenie wiele razy różniczkowalne, że jeśli $f_n(x) > 0$, to $x \in G_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

160.* Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Udowodnić, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(0) = a_n$ dla $n = 0, 1, \ldots$ *Jeśli dla pewnej liczby $r > 0$ szereg $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny na pewnym przedziale $(-r, r)$, a g jest taką nieujemną funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną, że jeśli $|x| \leq \frac{1}{3}r$, to $g(x) = 1$ a jeśli $|x| \geq \frac{2}{3}r$, to $g(x) = 0$, to możemy przyjąć, że $f(x) = g(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, funkcja g istnieje.*

161. Dowieść, że jeśli I jest przedziałem, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka funkcja $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, że $F^{(n)} = f$, czyli dowolna funkcja ciągła jest n–tą pochodną pewnej funkcji. Dowieść, że jeśli $F^{(n)} = G^{(n)}$ na przedziale I, to funkcja $F - G$ jest wielomianem stopnia mniejszego niż n.

162.! Udowodnić, że jeśli funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz $f_n(x) = n\big(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\big)$, to $f_n \rightrightarrows f'$

163. Niech $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ dla $x > 1$. Udowodnić, że funkcja ζ jest dobrze zdefiniowana oraz, że jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

164. Zbadać, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n+x}$ jest zbieżny i znaleźć zbiór wszystkich punktów różniczkowalności jego sumy.

165. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną. Załóżmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = g(x)$, przy czym na każdym przedziale ograniczonym ta zbieżność jest jednostajna. Dowieść, że istnieje taka liczba c, że $f(c) = ce^x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

166. Ile pochodnych ma funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$?

167. Niech $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x)$, jeśli $\frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n}$ oraz $f_n(x) = 0$ dla pozostałych x z przedziału $[0,1]$. Dowieść, że szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$ oraz $\sum \sup\{f_n(x)\colon \quad x \in [0,1]\} = \infty$.
Oznacza to, ze zbieżności jednostajnej tego szeregu nie można stwierdzić za pomocą kryterium Weierstrassa.

168. Dowieść, że jeżeli funkcja f jest nieparzysta i analityczna w punkcie 0, to $f^{(2n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

169. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji f, jeśli $f(x) =$

1. $(1 + x)\ln(1 + x)$;	2. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;
3. $\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;	4. $\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;
5. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$;	6. $\arccos(1 - 2x^2)$;
7. $x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$;	8. $x\arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$;
9. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;	10. $(1 + x)e^{-x}$;
11. $e^x \sin x$;	12. $(1 - x)^2\cosh\sqrt{\lvert x\rvert}$;
13. $\big(\ln(1 - x)\big)^2$;	14. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
15. $e^x\cos x$;	16. $(1 + x)^{-1}\ln(1 + x)$;
17. $\cos(b\arcsin x)$, $b \in \mathbb{R}$;	18. $x^{-2}(\arcsin x)^2$;
19. $\cos^2 x$;	20. $\sin^3 x$;
21. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$;	22. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;
23. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{-1}$;	24. $(1 + x + x^2)^{-1}$;
25. $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;	26. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
27. $\sin(b\arcsin x)$, $b \in \mathbb{R}$;	28. $(\operatorname{arctg} x)^2$;
29. $\sin(b\arccos x)$, $b \in \mathbb{R}$;	30. $\sin(3x)\sin(5x)$.

170. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego

a. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}x^n$, $p \in \mathbb{R}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big(3^n + (-2)^n\big)x^n$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x + 1)^n$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\dots\cdot(2n)}\big)^p x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}x^n$, $a \in (0, 1)$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n^2} x^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\big)x^n$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}x^{n^2}$;

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}x^n$;

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^n n}x^n$;

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{\ln n}\big)^n\big(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\big)x^n$;

l. $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{n}a^n + \frac{1}{n^2}b^n\big)^{n^2}\big(\frac{x+1}{2}\big)^n$, gdzie $a > 0$, $b > 0$;

m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}10^{\ell(n)}(2 - x)^n$, $\ell(n)$ to liczba cyfr liczby n.

171. Przedstawić funkcję $\ln(2 + 2x + x^2)$ w postaci $\sum a_n(x + 1)^n$.

172. Przedstawić funkcję $(1 - x)^{-1}$ w postaci $\sum a_n\frac{1}{x^n}$.

173. Przedstawić funkcję $\ln x$ w postaci $\sum a_n\big(\frac{x+1}{x-1}\big)^n$.

174. Przedstawić funkcję $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ w postaci $\sum a_n\big(\frac{x}{1+x}\big)^n$.

175.! Zsumować szereg

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$;	b. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$;
c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;	d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^n$;
e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\dots\cdot(2n)}x^n$;	f. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$;
g. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^n$;	h. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1)x^n$.

176. Znaleźć n–tą pochodną w punkcie 0 funkcji

a. e^{x^2}; b. $\operatorname{arctg}(2x)$.

177. Znaleźć n–tą pochodną funkcji

a. e^{x^2}; b. $\operatorname{arctg}(2x)$; c. $e^{10/x}$.

178. Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ dla $x < 1$. Znaleźć $F^{(n)}(0)$.

179. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest analityczna oraz $a < x_0 < b$, to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dla każdej liczby x, dla której szereg występujący po prawej stronie równości jest zbieżny.

180. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (-2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $[-1, 1]$ i $f^{(n)}(x) \geq 0$ dla każdego n i każdego $x \in [-1, 1]$, to funkcja ta jest analityczna w przedziale $(-1, 1)$ promień zbieżności i promień zbieżności jej szeregu Maclaurina nie jest mniejszy niż 1.

181. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz $|f^{(n)}(x)| \leq c^n$ dla każdego $x \in (a, b)$ i każdego $n \in \mathbb{Z}$, to dla dowolnych $x, x_0 \in (a, b)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$