AM1.2 — zadania 13

Pierwsze trzy zadania są obowiązkowe! Inne też należy rozwiązać.

Należy wybrać trzy spośród zadań o numerach 76, 82, 83, 84, 85, 87 i napisać ich rozwiązania na kartkach. Kartki z rozwiązaniami proszę przynieść nie później niż 1 kwietnia (piątek).

Poprawiłem treść zadania 100 po interwencji p. D.G. 29 IV 2016 r.

Poprawiłem numerację zadań 13 IV 2016 r. , nie tylko w tym zestawie

100. Załóżmy, że skorupka jajka jest powierzchnią powstałą w wyniku obrotu wykresu funkcji $\varphi\colon [0,2] \longrightarrow [0,\infty)$. Jak wiadomo jajo nie jest symetryczne względem płaszczyzny prostopadłej do jego osi obrotu. Zdefiniować funkcję $f\colon [0,1]\times[0,2] \longrightarrow [0,\infty)$ tak, by przy ustalonym $t \in [0,1]$ funkcja $f_t\colon [0,2] \longrightarrow [0,\infty)$ zdefiniowana wzorem $f_t(x) = f(t,x)$ była ciągła na przedziale $[0,2]$ i różniczkowalna w jego punktach wewnętrznych oraz by dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|t_1 - t_2| < \delta$ i $|x_1 - x_2| < \delta$, to $|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)| < \varepsilon$ (f ma być jednostajnie ciągła na prostokącie $[0,1]\times[0,2]$) i by funkcje f_t mogły pełnić rolę funkcji φ przy czym dla różnych $t \in (0,1)$ największa wartość funkcji f_t powinna być przyjmowana w różnych punktach przedziału $(1,2)$.

101. Dowieść, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi nierówność
$$x - \tfrac{x^3}{6} < \sin x < x.$$

102. Dowieść, że dla każdej liczby $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność
$$\operatorname{tg} x > x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2x^5}{15} + \tfrac{17x^7}{315}.$$

103. Niech a_n oznacza n-tą pochodną funkcji tangens w punkcie 0. Wykazać, że dla każdego n zachodzi równość $a_{2n} = 0$. Wyrazić a_{4n-1} za pomocą a_1, a_3, a_5, $\ldots$, a_{4n-3} oraz a_{4n+1} za pomocą a_1, a_3, a_5, $\ldots$, a_{4n-1}.

104. Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x^2} - \cos x)e^{\sin(2x) - \operatorname{tg}(3x)}}{\ln(1+5x)(\operatorname{tg} x - x)\cos(\operatorname{tg} x)}$.

105. Znaleźć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)\cdot(\operatorname{tg} x - x)\cdot\cos(\sin x)\cdot(\sqrt{64+x} - 8)}{\sin^2 x\cdot(\sqrt{1-\operatorname{tg}(x^2)} - \cos x)\cdot 2^{\sin(3x) - \operatorname{tg} x}}$.

106. Dowieść, że dla dowolnych liczb $n \in \mathbb{N}$ i $x > 0$ zachodzą nierówności
$$x - \tfrac{x^3}{3} + \ldots + \tfrac{x^{4n-3}}{4n-3} - \tfrac{x^{4n-1}}{4n-1} < \operatorname{arctg} x < x - \tfrac{x^3}{3} + \ldots + \tfrac{x^{4n-3}}{4n-3}.$$

107. Niech $s_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$. Udowodnić, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność podwójna: $\frac{1}{4(n+1)} < \left|\frac{\pi}{4} - s_n\right| < \frac{1}{4n}$.

108. Udowodnić, że $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1}) = O(\frac{1}{n^2})$, gdzie s_n oznacza sumę zdefiniowaną w poprzednim zadaniu.

109. Niech $\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^n}\right)$. Dowieść, że
$$\left|\tfrac{\pi}{4} - \sigma_n\right| < \tfrac{1}{(2n+3)\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{n+1}}$$
dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla jakich n zachodzi nierówność $\left|\frac{\pi}{4} - \sigma_n\right| < \frac{1}{1000}$, a dla jakich $\left|\frac{\pi}{4} - \sigma_n\right| < \frac{1}{1\,000\,000}$?

110. Dowieść, że dla dowolnych liczb $n \in \mathbb{N}$ i $x \in (0,1)$ zachodzi nierówność
$$\arcsin x > x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5 + \ldots + \frac{1}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}x^{2n-1}.$$

111. Dowieść, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, $0 < a < b$ i $x, y > 0$, to zachodzi nierówność
$$(x_1^a + x_2^a + x_3^a + \ldots + x_n^a)^{1/a} > (x_1^b + x_2^b + x_3^b + \ldots + x_n^b)^{1/b}.$$

112. Dowieść, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$.

113. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

114. Dowieść, że jeśli $x > 1$ i $p > 1$, to $x^p - 1 > p(x-1)$.

115. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $1 + 2\ln x \le x^2$.

116. Załóżmy, że funkcje $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne oraz $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$. Dowieść, że między każdymi dwoma pierwiastkami funkcji f leży pierwiastek funkcji g.

117. Dowieść, że jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że nierówność $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$ zachodzi dla dowolnych $x, y \in (a,b)$ oraz funkcja f jest ograniczona na pewnym przedziale $(c,d) \subseteq (a,b)$, to f jest wypukła.

118. Dowieść, że jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją różniczkowalną, że dla dowolnych $x, y \in (a,b)$ istnieje dokładnie jedna liczba c leżąca między x i y, że $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$, to funkcja f jest ściśle wypukła albo ściśle wklęsła.

119. Dowieść, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ i $g(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$ oraz funkcja $g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na (a,b), to istnieje taka liczba $c \in (a,b)$, że $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$ — nie zakładamy tu ciągłości funkcji g w a, ani w b.

120. Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na przedziale (a,b). Dowieść, że jeśli istnieje taka liczba $c \ge 0$, że $|f'(x)| \le cf(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$ i $f(a) = 0$, to $f(x) = 0$ dla każdego x.

121. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Dla każdego $x \geqslant 0$ i dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ zachodzi nie równość $f^{(n)}(x) \geqslant 0$. Udowodnić, że $f(x) = 0$ dla każdego $x \geqslant 0$.

122. Załóżmy, że funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest co najmniej trzykrotnie różniczkowalną. Definiujemy $S_f(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$ dla tych wszystkich x, dla których $f'(x) \neq 0$. Wykazać, że jeśli $S_f < 0$ i $S_g < 0$, to również $S_{f\circ g} < 0$.

123. Wykazać, że jeśli $S_f < 0$ (def. w poprzednim zadaniu) na pewnym przedziale, to funkcja f nie ma lokalnych minimów.

124. Dla jakich funkcji f zachodzi równość $S_f(x) = 0$ (definicja wyżej) dla wszystkich liczb x z pewnego przedziału?

125. Funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na całej prostej i dla pewnych liczb a, b zachodzą nierówności $\big(f(x)\big)^2 \le a$ oraz $\big(f(x)\big)^2 + \big(f''(x)\big)^2 \le b$ dla $x \in \mathbb{R}$. Dowieść, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\big(f(x)\big)^2 + \big(f'(x)\big)^2 \le \max(a,b)$.