AM1.2 — zadania 12

Pierwsze trzy zadania są obowiązkowe! Inne też należy rozwiązać.

Należy wybrać trzy spośród zadań o numerach 56, 57, 61, 65, 68, 71 i napisać ich rozwiązania na kartkach. Kartki z rozwiązaniami proszę przynieść nie później niż 18 marca (piątek).

Uwaga. Tu (oraz w wielu innych miejscach)
http://www.mimuw.edu.pl/ krych/matematyka/AM1skrypt
/am1_0708_cz_07-wlasnosci_funkcji_ciag_wyp.pdf
znajduje się dowód zasadniczego twierdzenia algebry, prawie opowiedziany na piątkowych ćwiczeniach.

77. Sprawdzić, które z funkcji x^a, a^x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln x$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, gdzie u i v są wielomianami są jednostajnie ciągłe i na jakich przedziałach.

78. Na jakich zbiorach, możliwie dużych, funkcje $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ oraz $\sin\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ są jednostajnie ciągłe.

79. Dowieść, że jeśli $-\infty < a < b < \infty$ i funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to można ją przedłużyć do funkcji ciągłej na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła jednostajnie.

80. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza to jest różnicą dwu funkcji monotonicznych ciągłych. Wyjaśnić, czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

81. Podać przykład funkcji ograniczonej $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

82. Funkcja f jest jednostajnie ciągła na przedziale P_1 i na przedziale P_2. Zbiór $P = P_1 \cup P_2$ jest przedziałem. Czy f musi być jednostajnie ciągła na przedziale P?

83. Dowieść, że jeśli zbiór A jest ograniczony a funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, to ta funkcja jest ograniczona.

84. Dowieść, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem, który nie zawiera choćby jednego swego skończonego punktu skupienia, to istnieje ograniczona funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

85. Niech $f(x) = x^6 + 6x^2 + 12x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Dowieść, że najmniejsza wartość funkcji f nie jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych, stopnia mniejszego niż 3.

86. Podać przykład takiej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że jeśli $x \neq y$, to $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(x) > x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

87. Czy funkcja $\frac{x}{1+x^2}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

88. Czy funkcja $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$?

89. Czy istnieje jednostajnie ciągła funkcja określona na półprostej $[0, \infty)$, która przekształca tę półprostą na $\mathbb{R}$?

90. Czy istnieje różnowartościowa funkcja ciągła określona na półprostej $[0, \infty)$, która przekształca tę półprostą na $\mathbb{R}$?

91. Zdefiniować różnowartościową funkcje ciągłą przekształcającą półprostą $(0, \infty)$ na $\mathbb{R}$.

92. Czy istnieje różnowartościowa funkcja jednostajnie ciągła, która przekształca półprostą $(0, \infty)$ na $\mathbb{R}$?

93. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, to dla każdej liczby $d > 0$ istnieje taka liczba M, że jeśli $|x_1 - x_2| \le d$, to $\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \le M$.

94. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, to f jest ciągła jednostajnie.

95. Rozstrzygnąć, czy z tego że funkcja $f\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ oraz $g\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, wynika, że ich iloczyn jest funkcją jednostajnie ciągłą.

96. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin \sqrt[3]{x}$ jest jednostajnie ciągła.

97. Znaleźć wszystkie przedziały, na których funkcja $\sin x^3$ jest jednostajnie ciągła.

Definicja. *Mówimy, że funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała $C > 0$, że dla dowolnych $x, y \in A$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha$.* $\square$

98. Sprawdzić, które z funkcji x^a, a^x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln x$ spełniają warunek Höldera, z wykładnikiem i na jakich przedziałach.

99. Wykazać, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^2$, to f jest funkcją stałą.