AM1.2 — zadania 11

Należy wybrać trzy spośród zadań o numerach 30, 31, 32, 39, 49, 50, 52 i napisać ich rozwiązania na kartkach. Kartki z rozwiązaniami proszę przynieść nie później niż 11 marca (piątek). Te i inne zadania należy umieć rozwiązać na zajęciach. Koniecznie rozwiązać zadania 34, 35, 38

53. Napisać omówione w czasie zajęć rozwiązanie zadania 10.

54. Niech $\mathfrak{C} \subset \mathbb{R}$ oznacza zbiór Cantora. Zdefiniować funkcję różniczkowalną $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest ciągła w punktach znajdujących się poza $\mathfrak{C}$ i nieciągła we wszystkich punktach $\mathfrak{C}$.

55. Rozważamy równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$. Ile rozwiązań w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ może mieć to równanie?

56. Obliczyć $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)$.

57. Wykazać, że pochodna wyznacznika macierzy $F(x) = \left(f_{i,j}(x)\right)_{1\le i,j\le n}$ jest sumą n wyznaczników macierzy uzyskanych z F przez zastąpienie jednego z wierszy wierszem utworzonym z pochodnych funkcji występujących w zastępowanym wierszu.

Definicja *Funkcją analityczną w punkcie* p nazywamy taką funkcję f określoną w zbiorze, który zawiera pewien przedział otwarty $(p-\delta, p+\delta)$ o środku p, którą w punktach tego przedziału można zdefiniować za pomocą równości

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + \ldots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n.$$

58. Dowieść, że jeśli funkcja f jest dana w przedziale $(p-\delta, p+\delta)$ wzorem

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + \ldots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n,$$

to $f^{(n)}(p) = n!a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

59. Dowieść, że jeśli funkcja f jest dana w przedziale $(p-\delta, p+\delta)$ wzorem

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + \ldots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$$

i $|q-p| < \delta$, to f jest analityczna w punkcie q i jest sumą odpowiedniego szeregu zbieżnego dla każdego x, dla którego zachodzi nierówność $|x-q| < \delta - |q-p|$.

60. Niech $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$ dla każdego x z przedziału I dla pewnych funkcji analitycznych w przedziale I. Wykazać, że funkcje f i g są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$. Wyjaśnić, czy teza pozostaje w mocy w przypadku funkcji klasy C^∞.

61. Wykazać, że dla każdej liczby $\omega > 0$ istnieje dokładnie jedna funkcja $f_\omega\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie I oznacza pewien przedział otwarty o środku w punkcie 0 taka, że $f''_\omega(x) = -\sin\left(f_\omega(x)\right)$ dla każdego $x \in I$, $f_\omega(0) = 0$ oraz $f'_\omega(0) = \omega$. Wykazać, że jeśli ω jest dostatecznie małe, to funkcja f_ω może być określona na całej prostej i że jest wtedy okresowa. Jeżeli $p(\omega)$ oznacza jej okres, to $\lim\limits_{\omega\to 0} = 2\pi$ oraz $\lim\limits_{\omega\to 0} \dfrac{p(\omega) - 2\pi}{\omega} = 0$.
To było opowiadanie o wahadle matematycznym.

62. Niech $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, przy czym $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Znaleźć $f^{(n)}(x)$.

63. Niech $f(x)=\frac{x-10}{x^2-20x+91}$. Znaleźć $f^{(n)}(x)$.

64. Znaleźć wzór na $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\cdots\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$ wiedząc, że $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\dots\cdot\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

65. Oszacować błąd przybliżenia $\sqrt[10]{1000}\approx 2$.

66. Oszacować błąd przybliżenia $(1+x)^a\approx 1+ax$.

67. Obliczyć $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)}$.

68. Niech f oznacza funkcję klasy C^{n+1} i niech $r_{n-1}(h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}\left(x+\theta_h\cdot h\right)$, r_j oznacza j–tą resztę we wzorze Taylora. Wykazać, że jeśli $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, to $\lim\limits_{h\to 0}\theta_h=\dfrac{1}{n+1}$.

69. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

70. Niech f będzie funkcją analityczną na $\mathbb{R}$ i niech $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Wykazać, że funkcja g jest dobrze określona na całej prostej, że jest analityczna oraz że $g(x)=x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x)=0$. Znaleźć $g'(p)$ jeśli p jest k–krotnym pierwiastkiem funkcji f. *Przekształcenie g jest związane z tzw. metodą Newtona znajdowania pierwiastków funkcji f, w wielu przypadkach ciąg x, $g(x)$, $g(g(x))$, … jest zbieżny do pierwiastka funkcji f, czyli punktu stałego funkcji g, zbieżność jest tym szybsza im wartość bezwzględna pochodnej g' w punkcie stałym funkcji g jest mniejsza, wynika to z twierdzenia o wartości średniej.*

71. Niech f będzie funkcją klasy C^2 na przedziale $[0,1]$, $|f''|\leq A$, $f(0)=0=f(1)$. Wykazać, że $|f'|\leq\frac{A}{2}$ na $[0,1]$.

72. Niech f będzie funkcją klasy C^2 na całej prostej, niech $M_i=\sup\left\{|f^{(i)}(x)\colon\quad x\in\mathbb{R}\right\}$ dla $i\in\{0,1,2\}$. Wykazać, że $M_1^2\leq 2M_0M_2$.

73. Wykazać, że wielomian $\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$ ma wszystkie swe pierwiastki w przedziale $[-1,1]$.

74. Wykazać, że wszystkie pierwiastki wielomianu $e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$ są liczbami rzeczywistymi.

75. Wykazać, że zachodzą nierówności

a. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x<\sin x<x$ dla $0<x<\frac{\pi}{4}$;

b. $\ln x<\frac{1}{2}(x^2-1)$ dla $0<x\neq 1$;

c. $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}>a^ab^bc^c>\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$ dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c, z których przynajmniej dwie są różne;

d. $x\ln x+2y\ln y+3z\ln z+(x+2y+3z)\ln 6\geq(x+2y+3z)\ln(x+2y+3z)$ dla dowolnych liczb dodatnich x,y,z.

76. Niech x będzie dowolną liczbą dodatnią i niech $a_0=x$ oraz $a_{n+1}=x^{a_n}$. Dla jakich $x>0$ ciąg (a_n) ma skończoną granicę, dla jakich ma granicę nieskończoną, a dla jakich granicy nie ma?