AM1.1 — zadania 10

Należy wybrać dwa spośród zadań o numerach 1, 2, 4, 5, 6 i napisać ich rozwiązania na kartkach. Kartki z rozwiązaniami proszę przynieść nie później niż 4 marca (piątek). Te i inne zadania należy umieć rozwiązać na zajęciach.

1. Wykazać, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, to zachodzi następująca równość $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+h)-f(p-h)}{2h}=f'(p)$.

2. Jeśli funkcja f jest ciągła, to $\lim\limits_{h\to 0}\big(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\big)=0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

3. Jeśli funkcja f jest ciągła, to $\lim\limits_{h\to 0}\big(f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)\big)=0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

4. Funkcja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej. Wiadomo, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f'(x)|<1$. Czy wynika stąd, że istnieje liczba p, taka że $f(p)=p$, czyli: czy funkcja f ma punkt stały?

5. Niech $0<x<\frac{\pi}{2}$. Wyjaśnić, która liczba jest większa $\sin(\operatorname{tg}x)$, czy $\operatorname{tg}(\sin x)$. Nie wykluczamy, że odpowiedź zależy od x.

6. Ile pierwiastków ma równanie:
(i) $x^5-5x=a$ w zależności od $a\in\mathbb{R}$; (ii) $e^x=ax^2$ w zależności od $a\in\mathbb{R}$.

7. Znaleźć przedziały monotoniczności oraz wypukłości lub wklęsłości funkcji f, jej lokalne ekstrema i punkty przegięcia. Znaleźć granice funkcji f oraz granice funkcji f' w końcach przedziałów składających się na ich dziedziny (niekoniecznie takie same). Naszkicować wykres funkcji[1] f, jeśli $f(x)=$

a. $x^4(1+x)^{-3}$; **b.** $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; **c.** $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$;

d. $1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$; **e.** $\ln\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)$; **f.** $\sin x\sin 3x$.

g. $(x+1)^{5/3}\left(x^2+2x\right)^{1/3}$. Wiadomo, że

$$f'(x)=\tfrac{1}{3}\,(x+1)^{2/3}\left(x^2+2x\right)^{-2/3}\left(7x^2+14x+2\right),$$

niewymiernymi pierwiastkami funkcji f' są $x_5\approx-1.845$ oraz $x_6\approx-0.155$, ma ona również pierwiastek wymierny,

$$f''(x)=\tfrac{2}{9}\,(x+1)^{-1/3}\left(x^2+2x\right)^{-5/3}\left(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4\right),$$

pierwiastkami drugiej pochodnej są $x_1\approx 0.177$, $x_2\approx-2.177$, $x_3\approx-0.492$, $x_4\approx-1.508$, są one niewymierne.

h. $\frac{\sqrt[3]{x^2+2x-7}}{\sqrt[3]{x^2+2x-5}}$. Wiadomo, że $f'(x)=\frac{4}{3}(x+1)\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{4}{3}}\left(x^2+2x-7\right)^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x)=-\frac{4}{9}\left(9x^4+36x^3+8x^2-56x-181\right)\left(x^2+2x-5\right)^{-\frac{7}{3}}\left(x^2+2x-7\right)^{-\frac{5}{3}}$ oraz że pierwiastkami (jednokrotnymi) drugiej pochodnej są liczby $x_1\approx 1.7$ oraz $x_2\approx-3.7$, innych pierwiastków rzeczywistych funkcja f'' nie ma.

---

[1]**UWAGA:** Zakładamy, że dziedziny funkcji są tak dobrane, że operacje definiujące funkcję są wykonalne oraz że dziedziny są maksymalnymi zbiorami o tej własności.

8. Wykazać, że punkt pośredni w twierdzeniu Rolle'a może być dowolnym punktem przedziału (a, b).

9. Niech $f(x) = x\sin(\ln(x))$ dla $x > 0$ oraz $f(0) = 0$. Niech $c_x < x$ będzie taką liczbą dodatnią, że $f(x) - f(0) = xf'(c_x)$. Wykazać, że funkcja $x \to c_x$ ma punkty nieciągłości w dowolnym przedziale postaci $(0, \delta)$, gdzie $\delta > 0$.

10. Dowieść, że istnieje taka różnowartościowa funkcja $f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, że $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ oraz że funkcja $f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieciągła w punkcie 0.

11. Obliczyć pochodną funkcji f w tych punktach, w których istnieje, jeśli $f(x) =$

(a) $1 - 3x + 7x^2 + 5x^3$;
(ą) $\sqrt{1+x}$;
(c) $\frac{2x}{1+x^2}$;
(ć) $\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$;
(d) $\arcsin(\cos x)$;
(e) $\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$;
(ę) $\sin\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;
(f) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;
(g) x^x;
(h) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$;
(i) e^{-x^2};
(j) $e^{\sin x}$;
(k) $(\ln x)^x$;
(l) $\sin(\sin x)$;
(ł) $\sqrt{x + \sqrt{2x + \sqrt{3x}}}$;
(m) $\ln|x|$;
(n) $\sin^2(\sqrt{x})$;
(o) $|\sin x|$;
(ó) $\ln|\sin x|$;
(p) $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;
(r) $x\,|x|$;
(ś) $\sqrt{|x|}$;
(t) $\sqrt[3]{x(x+1)}$;
(u) $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;
(w) $x\lfloor x\rfloor$;
(x) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;
(z) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$;
(ż)$\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

12. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie p lub wykazać, że ta styczna nie istnieje, jeśli $f(x) =$

(A) $\cos^2 x - 2\sin x$, $p = (\pi, 1)$;
(B) $\operatorname{arctg}(2x)$, $p = (0, 0)$;
(C) $|x-1|\sqrt[3]{x+2}$, $p = -(3, 4)$;
(D) $\left(x^2-1\right)^2$, $p = (0, 1)$;
(E) $\left(x^2-1\right)^2$, $p = \left(\sqrt{2}, 1\right)$;
(F) $\sqrt[3]{x}$, $p = (0, 0)$;
(G) $\sqrt[3]{x - \sin x}$, $p = (0, 0)$;
(H) $\sqrt[3]{e^x - 1}$, $p = (0, 0)$;
(I) $\sqrt{1 - \cos\left(x\sqrt{2}\right)}$, $p = (0, 1)$;
(J) $1 - x^2$, $p = (0, 1)$.

13. Dowieść, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x)$. Rozstrzygnąć, czy z istnienia granicy $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ wynika istnienie pochodnej $f'(x)$.

14. Zdefiniować funkcję ciągłą $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalną w punktach $x \notin \{1, 2, \ldots, 100\}$ i która nie ma nawet jednostronnych pochodnych w punktach $x \in \{1, 2, \ldots, 100\}$.

15. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją a $g \in \mathbb{R}$ taką liczbą, że dla dowolnych, zbieżnych do 0 ciągów (h'_n), (h''_n) liczb dodatnich zachodzi równość $g = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(7+h'_n)-f(7-h''_n)}{h'_n+h''_n}$. Dowieść, że $f'(7) = g$.

16. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$. Dowieść, że $f(e) = f(\pi)$.

17. Podać przykład takiej różnowartościowej funkcji $f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, która ma pochodną w punkcie 0 i $f'(0) = 0$, że funkcja odwrotna f^{-1} nie ma pochodnej lewostronnej w punkcie $f(0)$ i jest ciągła w punkcie $f(0)$.

18. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą w punkcie p, że funkcja $f^2 = f \cdot f$ jest różniczkowalna w punkcie p.
Dowieść, że funkcja f^k jest różniczkowalna w punkcie p dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 2$, tu: $f^{\ell+1}(x) = f^{\ell}(x) \cdot f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Czy z założeń o funkcji f wynika, że jest ona różniczkowalna w punkcie p?

19. Czy istnieje taka funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie ma jednostronnych pochodnych w punkcie 0, że złożenie $f \circ f$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie 0.

20. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n$ dla $x \in (-1, 1)$. Dowieść, że funkcja f jest różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $(-1, 1)$.

21. Dowieść, że jeśli $f^3(x) + 3f(x) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby $f(0)$ oraz $f'(0)$.

22. Dowieść, że jeżeli $f(x) + e^{f(x)} = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby $f(1)$ oraz $f'(1)$.

23. Znaleźć wzór na $1+2x+3x^3+\cdots+nx^{n-1}$ korzystając z tego, że $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

24. Dowieść, że pochodna funkcji parzystej jest nieparzysta, a pochodna funkcji nieparzystej — parzysta.
Czy z tego, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i f' jest parzysta, wynika, że funkcja f jest nieparzysta?
Czy z tego, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i f' jest nieparzysta, wynika, że funkcja f jest parzysta?

25. Funkcja $f\colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Czy z tego, że istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ wynika, że istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$?

26. Dowieść, że pochodna różniczkowalnej funkcji okresowej jest okresowa. Czy z okresowości pochodnej f' wynika okresowość funkcji f?

27. Dowieść, że dla każdej liczby $\varepsilon \in [0, 1)$ istnieje dokładnie jedna taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) - \varepsilon \sin f(x) = x$. Wykazać, że funkcja f jest różniczkowalna.

28. Niech $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że $a < x < \alpha_n < \beta_n < b$ dla każdego n i $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = x$. Dowieść, że jeżeli ciąg $\left(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n}\right)$ jest ograniczony, to zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x)$. Podać przykład świadczący o istotności założenia ograniczoności ciągu $\left(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n}\right)$.