AM1.1 — zadania 9

1. Wykazać, że jeśli P jest przedziałem (niekoniecznie ograniczonym), a $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, to funkcja f jest wypukła (ściśle wypukła) wtedy i tylko wtedy, gdy , gdy dla każdych punktów $x, z \in P$ zachodzi nierówność $f(\frac{x+z}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(z)}{2}$ $\quad (f(\frac{x+z}{2}) < \frac{f(x)+f(z)}{2}$, gdy $x \neq z)$.

2. Wykazać, że jeśli funkcja ściśle wypukła jest ciągła i **nie** jest monotoniczna, to ma wartość najmniejszą i ta najmniejsza wartość jest przyjmowana w dokładnie jednym punkcie, przy czym jest to punkt wewnętrzny dziedziny funkcji.

3. Wykazać, że jeśli funkcje f i g są wypukłe, funkcja g jest niemalejąca, to funkcja $g \circ f$ jest *wypukła*, jeśli natomiast g jest nierosnąca, to złożenie $g \circ f$ *może* być funkcją *wklęsłą*, *wypukłą* lub być ściśle wypukła na jednym przedziale, a na drugim ściśle wklęsła.

4. Czy funkcja ciągła f, wypukła na każdym z przedziałów $[a, b]$ i $[b, c]$ musi być wypukła na przedziale $[a, c]$?

5. Podać przykład dwu funkcji dodatnich ściśle wypukłych, których iloczyn jest ściśle wklęsły.

6. Wykazać, że iloczyn dwu dodatnich funkcji wypukłych, niemalejących jest wypukły. Czy iloczyn dwu funkcji wypukłych, nierosnących musi być wypukły?
Sformułować odpowiednie twierdzenie dla funkcji wklęsłych.

7. Wykazać, że jeśli P jest przedziałem (niekoniecznie ograniczonym), a $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją wypukłą, to dla każdego przedziału $[a, b] \subset \mathrm{int}P$, czyli zawartego we **wnętrzu**[1] P, to istnieje taka liczba L (zależna od a i b), że dla dowolnych $x, z \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(z)| \leqslant L|x - z|.$$

8. Korzystając ewentualnie z wklęsłości funkcji sinus na przedziale $[0, \pi]$ dowieść, że spośród n–kątów wpisanych w dany okrąg, największy obwód ma n–kąt foremny.

9. Korzystając ewentualnie z wypukłości funkcji tangens na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ dowieść, że spośród n–kątów opisanych na danym okręgu, najmniejszy obwód ma n–kąt foremny.

10. Dowieść, że spośród n–kątów wpisanych w dany okrąg, największe pole ma n–kąt foremny.

11. Dowieść, że spośród n–kątów opisanych na danym okręgu, najmniejsze pole ma n–kąt foremny.

12. Wykazać, że $\ln x < -1 + \ln 10 + \frac{x}{10}$ dla $0 < x \neq 10$.

13. Wykazać, że $\ln x < \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ dla $0 < x \neq 1$.

14. Ile rozwiązań ma równanie $2^x = x + 3$. Znaleźć jego pierwiastki z dokładnością do 0,01.

[1] Wnętrze P to przedział P, z którego usunięto końce, jeśli miał: $\mathrm{int}\,\mathbb{R} = \mathbb{R}, \mathrm{int}[0, \infty) = (0, \infty)$ itd.

15. Dowieść, że funkcja $x \ln x$ jest ściśle wypukła na $(0, \infty)$.

16. Wykazać, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $z > 0$, to zachodzi nierówność
$$x \ln x + 2y \ln y + 3z \ln z + (x + 2y + 3z) \ln 6 \geqslant (x + 2y + 3z) \ln(x + 2y + 3z).$$
Kiedy zachodzi równość?

17. Wykazać, że nierówność $\left(\frac{x+2y}{3}\right)^{\frac{x+2y}{3}} < \frac{x^x+2y^y}{3}$ zachodzi dla dowolnych *różnych* liczb rzeczywistych dodatnich x, y.

18. Wykazać, że $(2 - \sqrt{3})a^{2+\sqrt{3}} + (2 + \sqrt{3})b^{2-\sqrt{3}} \geqslant 4\sqrt[4]{ab}$ dla dowolnych $a > 0$ i $b > 0$.

19. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b równanie $\ln x = ax + b$ ma dokładnie dwa rozwiązania, dokładnie jedno rozwiązanie lub nie ma rozwiązań w ogóle.

20. Dowieść, że $2^{1-p} \leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$ dla dowolnych liczb $p > 1$ i $x \in [0, 1]$.

21. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^a b^b c^c > \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$.

22. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^a b^b c^c < \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$.

23. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $(b + c)^a (c + a)^b (a + b)^c < \left(\frac{2}{3}(a + b + c)\right)^{a+b+c}$.

24. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnić, że następujące trzy warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) ciąg (p_n) o wyrazie $p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n)$ jest zbieżny;

(iii) istnieje taka liczba naturalna k, że ciąg (q_n) o wyrazie
$$q_n = (1 - a_k)(1 - a_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - a_n)$$
ma granicę dodatnią i skończoną.

Uwaga. Jeśli $a_n \neq 1$ dla każdego n, to można przyjąć, że $k = 1$.

25. Dowieść nierówności Minkowskiego ($p \geq 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$):
$$\left(|a_1 + b_1|^p + |a_2 + b_2|^p + \cdots + |a_n + b_n|^p\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p\right)^{1/p} + \left(|b_1|^p + |b_2|^p + \cdots + |b_n|^p\right)^{1/p}$$