AM1.1 — zadania 8

Przypomnę kilka dosyć ważnych granic, które już pojawiły się na zajeciach

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$ dla każdego $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}=1$.

---

1. Znaleźć wszystkie punkty skupienia zbioru

a. Q.

b. zbioru $\mathfrak{C}$ złożonego ze wszystkich tych punktów przedziału $[0,1]$, które można zapisać w układzie trójkowym bez użycia cyfry 1. Czy ten zbiór zawiera jakiś przedział?

c. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{x+y\sqrt{2}:\quad x,y\in\mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie punkty skupienia zbioru $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

d. Niech $\mathbb{Z}(\sqrt{2})=\{x+y\sqrt{2}:\quad x,y\in\mathbb{Z}\}$. Znaleźć wszystkie punkty skupienia zbioru $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$.

Uwaga. Zbiór $\mathfrak{C}$ zdefiniowany w tym zadaniu zwany jest zbiorem Cantora.

2. Udowodnić, że dla każdego parzystego k istnieje taka liczba $x<0$, że

$$e^x<1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}.$$

3. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$.

4. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ i $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

5. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

6. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x+x^2)(13+x)(257+x^7)}{(2x+271)^{10}}$.

7. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)(6+x)(11+x)(17+x)(24+x)}{(x^2+x+1)^3}$.

8. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)(6+x)(11+x)(17+x)(24+x)(31+x)}{(x^2+x+1)^3}$.

9. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-6x^2+11x-6}$.

10. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^5-3x^4+x^3+13x^2-7x-30}{x^5+2x^4-5x^3-10x^2+4x+8}$.

11. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^{2015}-2015}{x^2-1}$.

12. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$, tu $m,n\in\mathbb{N}$.

13. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}$.

14. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x}+\sqrt[10]{x}}{\sqrt{961x+1024}}$.

15. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{4+5x}-7}{x-9}$.

16. Znaleźć $\lim\limits_{x\to -32}\frac{\sqrt{17-x}-7}{2+\sqrt[5]{x}}$.

17. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(1+x)^k}-1}{x}$, tu $k,n \in \mathbb{N}$.

18. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt{x}-8}$.

19. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+6x-14x^7}-3}{x+x^2+x^3}$.

20. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[81]{1+729x}-\sqrt[13]{1+117x}}{x^2+x^3}$.

21. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}$.

22. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

23. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

24. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\cdot\ldots\cdot(1-\sqrt[57]{x})}{(1-x)^{56}}$.

25. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

26. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1}\,)^n+(x+\sqrt{x^2-1}\,)^n}{x^n}$, tu $n \in \mathbb{N}$.

27. Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

28. Znaleźć $\lim\limits_{a\to 0}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\lim\limits_{a\to 0}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $0 \neq b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

29. Dowieść, że jeśli stopień wielomianu w jest dodatni i parzysty, to
$$\lim_{x\to\infty} w(x) = \infty = \lim_{x\to-\infty} w(x).$$

30. Wykazać, że jeśli stopień wielomianu w jest nieparzysty, to granice $\lim\limits_{x\to\infty} w(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$ są nieskończone i zachodzi równość $\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$.

31. Podać przykład takich dwu funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ oraz

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x) = 0$,
(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x) = -13$,
(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x) = \infty$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x) = -\infty$,
(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x)$ nie istnieje.

32. Podać przykład takich dwu funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ oraz

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = 0$,
(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = -13$,
(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = \infty$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = -\infty$,
(e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)$ nie istnieje.

33. Dowieść, że jeśli $c_n, c'_n \in \{0,2\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c'_n}{3^n}$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c'_n}{2^{n+1}}$.

Niech $f\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}}$. Dowieść, że funkcja f zdefiniowana w zbiorze Cantora $\mathfrak{C}$ jest ciągła w każdym dziedziny i przekształca zbiór Cantora *na* przedział domknięty $[0,1]$.

34. Dowieść, że każda funkcja ciągła $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathfrak{C}$ jest stała.

35. Dowieść, że jeśli $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest punktem skupienia zbioru $\{na - \lfloor na \rfloor : \quad n \in \mathbb{N}\}$.

36. Zbiór wyrazów $\{a_n : \quad n \in \mathbb{N}\}$ ciągu (a_n) jest nieskończony. Dowieść, że ciąg (a_n) ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{a_n : \quad n \in \mathbb{N}\}$ ma dokładnie jeden punkt skupienia.

37. Zdefiniować taką funkcję $a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, że:

(i) dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a(n,k)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a(k,n)$;

(ii) istnieją granice $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a(n,k)$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} a(n,k)$;

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a(n,k) \neq \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} a(n,k)$.

38. Dowieść, że każda nieujemna liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru kwadratów wszystkich liczb wymiernych.

39. Dowieść, że jeśli każda funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ma własność przyjmowania wartości pośrednich, tzn. jeśli liczba C znajduje się między liczbami $f(x)$ i $f(y)$, to istnieje takie $c \in A \cap (x,y)$, że $C = f(c)$, to zbiór A jest przedziałem.

Definicja. Mówimy, że funkcja $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in P$ funkcja $y \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ jest niemalejąca na zbiorze $P \setminus \{x\}$.

40. Dowieść, że każda funkcja wypukła $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Podać przykład funkcji wypukłej $f\colon [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma punkt nieciągłości.

41. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest nieciągła w punkcie 0 i ma własność Darboux (przyjmowania wartości pośrednich).

42. Załóżmy, że $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ są takimi ciągami, że dla pewnej liczby $x_0 \neq 0$ szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$ są zbieżne. Udowodnić, że jeśli istnieje taki ciąg (x_j) liczb różnych od 0 zbieżny do 0, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_j^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x_j^n$ dla $j = 1, 2, \ldots$, to $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

43. Dowieść, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to funkcja dana wzorem $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(-1,1]$.

44. Udowodnić, że jeśli funkcje $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, to funkcje $\max(f,g)$ i $\min(f,g)$ zdefiniowane wzorami $\max(f,g)(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$ i analogicznie $\min(f,g)(x) = \min\big(f(x), g(x)\big)$ też są ciągłe.

45. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma dokładnie jeden punkt ciągłości.

46. Udowodnić, że istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona na żadnym przedziale.

47. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Dowieść, że istnieje funkcja niemalejąca $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której jedynymi punktami nieciągłości są liczby a_1, a_2, a_3, $\ldots$

48. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym i istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x+1) - f(x)\big)$, to istnieje również granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ i spełniona jest równość $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x+1) - f(x)\big)$.

49. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona na każdym przedziale ograniczonym i istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$, to istnieje też granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}}$ i spełniona jest równość $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$.

50. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją ciągłą w co najmniej jednym punkcie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

51. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją monotoniczną, że równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ma miejsce dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

52. Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją ograniczoną na przedziale (-1,1), że dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ ma miejsce równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$, to istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = ax$.

53. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2}\colon \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie takie funkcje

$$f\colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $f(1) = 1$.
Uwaga: w zbiorze $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ wykonalne są cztery działania arytmetyczne, mianowicie dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od 0.

54. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) := \{\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6}\colon \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}\}$. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, re $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ i $f(1) = 1$.

55. Dowieść, że jeśli wielomian v nie ma pierwiastków rzeczywistych i stopień wielomianu w nie jest większy niż stopień wielomianu v, to iloraz $\frac{w}{v}$ jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}$,

56. Rozstrzygnąć czy:
(a) kwadrat funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą;
(b) sześcian funkcji nieciągłej musi być funkcją nieciągłą.

57. Dowieść, że jeśli funkcja f jest ciągła, to funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

58. Dowieść, że dla każdego wielokąta wypukłego istnieje prosta, która dzieli jednocześnie obwód i pole wielokąta na połowy.

59. Dowieść, że na brzegu każdego wielokąta wypukłego leżą cztery punkty, które są wierzchołkami pewnego kwadratu.

60. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, a $c \in (0,1)$ taką liczbą, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ jest spełniona nierówność $|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $x_0 \in \mathbb{R}$, dla której zachodzi równość $f(x_0) = x_0$.

61. Podać przykład takiej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że jeśli $x \neq y$, to $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(x) > x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

62. Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x) = 1 - |2x - 1|$. Niech $f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n literek f}}(x)\ldots))$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ustalić liczbę rozwiązań równania $f^n(x) = x$.

63. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, obraz $f([a,b])$ przedziału $[a,b]$ jest przedziałem o długości $b - a$.

64. Niech $C \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym (tzn, zawierającym wszystkie swoje skończone punkty skupienia) i ograniczonym a $f\colon C \longrightarrow C$ — funkcją niemalejącą. Udowodnić, że $f(p) = p$ dla pewnego punktu $p \in C$.

65. Niech $0 < c < 1$ i niech $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{dla} \quad \in [0,c] \\ \frac{1-x}{1-c} & \text{dla} \quad x \in [c,1] \end{cases}$ Punkt x ma okres n wtedy i tylko wtedy, gdy n jest najmniejszą z liczb naturalnych $k \geq 1$, dla których zachodzi równość $\underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{k literek f}}(x)\ldots)) = x$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją punkty, które mają okres n i że jest tych punktów skończenie wiele.

66. Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że dla każdej liczby $x > 0$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = 0$. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

67. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ dla $x \notin \{1,2\}$ oraz $f(1) = f(2) = 0$.

68. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2x^2-3x+1}$ dla $x \notin \{1, \frac{1}{2}\}$ oraz $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

69. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli $f(x) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$.

70. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{gdy} x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{p}{q+1}, & \text{gdy} \quad x = \frac{p}{q}, q \geqslant 1,\ p, q \in \mathbb{Z}, \mathrm{NWD}(p,q) = 1. \end{cases}$$

71. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji f, jeśli g jest funkcją Riemanna i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x) = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)g(x)$.