AM1.1 — zadania 7

Podsumowanie różnych opowieści z ćwiczeń.

Z wykładu wiadomo, że jeśli $n > -x$, to $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ i że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$. Stąd wynika, że dla $n > -x$ zachodzi nierówność $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x$. Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą a $k > |x|$ — nieparzystą liczbą naturalną. Jeśli $n \geqslant j \geqslant k$, to

$$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1)}{n^j}\cdot\frac{|x|^j}{j!} \geqslant \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j)}{n^{j+1}}\cdot\frac{|x|^{j+1}}{(j+1)!}\,,$$

bo $n-j<n$ i $|x|<j+1$, przy czym nierówność jest ostra dla $x\neq 0$. Wynika stąd, że jeśli j jest liczbą parzystą, to suma $\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1)}{n^j}\cdot\frac{|x|^j}{j!}+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j)}{n^{j+1}}\cdot\frac{|x|^{j+1}}{(j+1)!}$ jest nieujemna. Wobec tego jeśli $n\geqslant k$, to ponieważ

$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1)}{n^j} = (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{j-1}{n}) \geqslant (1-\frac{1}{k})(1-\frac{2}{k})\ldots(1-\frac{j-1}{n})k = \frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-j+1)}{k^j}$,

więc $e^x \geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+x+\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2}{n^3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{x^k}{k!}\geqslant$

$$\geqslant 1+x+\frac{k(k-1)}{k^2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{k(k-1)(k-2}{k^3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-k+1)}{k^k}\cdot\frac{x^k}{k!}=\left(1+\frac{x}{k}\right)^k.$$

Przechodząc do granicy przy $n\longrightarrow\infty$ otrzymujemy nierówność ($k>|x|$, k – nieparzyste)

$$e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{x^k}{k!}\geqslant\left(1+\frac{x}{k}\right)^k.$$

Z niej, z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ i twierdzenia o scalaniu wynika, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $n\in\mathbb{N}$ i $n>|x|-2$, to zachodzą nierówności

$$\left|e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\ldots\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{|x|^{n+3}}{(n+3)!}+\ldots\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{|x|}{n+2}+\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{|x|}{n+2}\right)^2+\ldots=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\left(1-\frac{|x|}{n+2}\right),$$

przy czym z nierówności $|x|<n+2$ korzystaliśmy tylko sumując szereg geometryczny (ostatnia równość).

Z otrzymanej nierówności i twierdzenia o trzech ciągach wynika między innymi, że jeśli $x_n\neq 0$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n}-(1+x_n+\frac{x_n^2}{2!})}{x_n^3}=\frac{1}{3!}\,.$$

Wiadomo, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\forall_n\, 0<|x_n|<1$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$. Obliczymy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)-x_n}{x_n^2}$. Niech $y_n=\ln(1+x_n)$. Oczywiście $y_n\neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$. Oznaczmy $\gamma(x)=\frac{e^x-(1+x+\frac{x^2}{2!})}{x^3}$ i $\gamma(0)=\frac{1}{6}$. Tę definicję można przepisać w postaci

$$e^x=1+x+\tfrac{1}{2!}x^2+\gamma(x)x^3.$$

Mamy $\frac{\ln(1+x_n)-x_n}{x_n^2}=\frac{y_n-(e^{y_n}-1)}{y_n^2}\cdot\frac{y_n^2}{x_n^2}=-\frac{e^{y_n}-1-y_n}{y_n^2}\cdot\frac{y_n^2}{x_n^2}=-\frac{\frac{1}{2}y_n^2+y_n^3\gamma(y_n)}{y_n^2}\cdot\frac{y_n^2}{x_n^2}=(\gamma(y_n)y_n+\frac{1}{2})\cdot\frac{y_n^2}{x_n^2}$. Wynika stąd od razu, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)-x_n}{x_n^2}=-\lim\limits_{n\to\infty}(\gamma(y_n)y_n+\frac{1}{2})\cdot\frac{y_n^2}{x_n^2}=-(\frac{1}{6}\cdot0+\frac{1}{2})\cdot1=-\frac{1}{2}$. Teraz obliczamy: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)-(x_n-\frac{1}{2}x_n^2)}{x_n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-((e^{y_n}-1)-0{,}5(e^{y_n}-1)^2)}{y_n^3}\cdot\frac{y_n^3}{x_n^3}=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{y_n}-1-y_n-0{,}5(e^{y_n}-1)^2}{y_n^3}=$

$=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0{,}5y_n^2+\gamma(y_n)y_n^3-0{,}5\left(y_n+0{,}5y_n^2+\gamma(y_n)y_n^3\right)^2}{y_n^3}=$

$=-\lim\limits_{n\to\infty}(\gamma(y_n)-0{,}5-0{,}125y_n-y_n\gamma(y_n)-0{,}5y_n^2\gamma(y_n)-0{,}5y_n^3\gamma(y_n)^2)=-(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$,

Te obliczenia ilustrują ważny sposób postępowania w analizie matematycznej: przybliżamy jakąś funkcję (powyżej była to funkcja wykładnicza) wielomianami z odpowiednio dużą dokładnością (różnica między funkcją i wielomianem podzielona przez potęgę zmiennej dąży do 0), oczywiście przybliżenie jest dokładne w pobliżu pewnego punktu (w rozważaniach powyżej – w pobliżu 0). Ta metoda będzie w dalszej części wykładu i ćwiczeń rozwinięta i pogłębiona.

Przypomnę jeszcze kilka dosyć ważnych granic, które były obliczone na ćwiczeniach lub na wykładzie w nadziei, że pomogą Państwu w rozwiązywaniu kolejnych zadań:

1. jeśli $x, y \leqslant M$, to $|e^x - e^y| \leqslant e^M |x-y|$,
2. jeśli $x, y \geqslant c > 0$, to $|\ln x - \ln y| \leqslant |x-y|$,
3. dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $x, y \geqslant 0$ zachodzi nierówność $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leqslant \sqrt[n]{|x-y|}$,
4. jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0$ (bo $x > 0 \Rightarrow \ln x \leqslant x - 1 \Rightarrow \ln x = 2\ln\sqrt{x} < \sqrt{x} - 1$),
5. jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ i $a \in (0, \infty)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n^a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a}\frac{\ln(x_n^a)}{x_n^a} = 0$,
6. jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ i $a \in (0, \infty)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^a}{e_n^x} = 0$,
7. $|q| < 1, a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^a q^n = 0$,
8. dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Zadania

1. Wskazać dwie takie liczby $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$, że $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > e^x$.

2. Udowodnić, że dla każdego parzystego k istnieje taka liczba $x < 0$, że

$$e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}.$$

3. Dowieść, że jeśli jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$

4. Dowieść, że jeśli jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{1/x_n} = 1$

5. Dowieść, że jeśli jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = g$

6. Dowieść, że jeśli szereg $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to również szereg $\sum a_n^2$ jest zbieżny. Czy teza jest prawdziwa dla szeregów o wyrazach różnych znaków?

7. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ dla $p \in \mathbb{R}$.

8. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^p}$ dla $p \in \mathbb{R}$.

9. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

10. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

11. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (4+3n)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (2+4n)}$.

12. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}$.

13. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{n^5}{2^n + 3^n}$.

14. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$.

15. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{((n+1)!)^n}{2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \dots \cdot (2n)!}$.

16. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}\right)^k$ w zależności od $k \in \mathbb{N}$.