AM1.1 — zadania 5

1. Niech $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n)$.
Znaleźć granicę $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} n^a\big((1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma)\big)$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

2. Dowieść, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ i obie granice są równe. Czy z istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ wynika istnienie granicy $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$?

3. Dowieść, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i obie granice są równe.

4. Niech $(a_{1,n})$, $(a_{2,n})$, $(a_{3,n})$, $\ldots$ będą dowolnymi ograniczonymi ciągami liczb rzeczywistych. Udowodnić, że istnieje wtedy taki ściśle rosnący ciąg (n_m) liczb naturalnych, że wszystkie ciągi (a_{1,n_m}), (a_{2,n_m}), (a_{3,n_m}), $\ldots$ są zbieżne — jest ich nieskończenie wiele!

5. Wykazać, że wśród siedemnastokątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 istnieje siedemnastokąt o największym obwodzie. Można skorzystać z poprzedniego zadania.

6. Dane są takie koła K_1, K_2, K_3, $\ldots$, że dla dowolnej liczby naturalnej n koła K_1, K_2, K_3, $\ldots$,K_n można tak umieścić w kwadracie Q, by ich wnętrza były parami rozłączne. Dowieść, że w kwadracie Q można tak umieścić wszystkie koła K_1, K_2, K_3, $\ldots$, by wnętrza każdej pary były rozłączne.

7. Niech x i a będą liczbami dodatnimi i niech $a_0 = a = b_0$ oraz $a_{n+1} = \frac{1}{3}\big(2a_n + \frac{x}{a_n^2}\big)$ oraz $b_{n+1} = \frac{1}{3}\big(b_n + \frac{2x}{b_n^2}\big)$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Udowodnić, że dla każdej pary liczb $t, x > 0$ zachodzi nierówność $t + \frac{2x}{t^2} \geqslant \frac{\sqrt[3]{4x}}{2}$.
Udowodnić, ze ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do liczby $\sqrt[3]{x}$.
Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - \sqrt[3]{x}}{b_n - \sqrt[3]{x}}$.

8. Dowieść, że ciąg o wyrazie $\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1}$ jest ściśle malejący. Znaleźć

$$\lim_{n\to\infty} n^2\Big(\big(1 + \tfrac{1}{n}\big)^n + \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)^{n+1} - 2e\Big).$$

9. Niech $a_n = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n-2)\cdot(2n-2)\ \cdot\ 2n\ \cdot\ 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot(2n-3)\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) ma granicę oraz że jego granica jest skończona i dodatnia.

10. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\big) = \ln 2$. Można ewentualnie użyć stałej Eulera.

11. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\big)$. Można ewentualnie użyć stałej Eulera.

12. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\big)$. Można ewentualnie użyć stałej Eulera.

13. (nowoczesna interpretacja słowa *zadanie*) zajrzeć tu: życiorys Eulera i tu: grób Eulera. Leonhard Euler urodził się 15 kwietnia (1707), tego samego dnia, ale wcześniej (1452) urodził się Leonardo da Vinci, a później (1809) Hermann Grassmann — człowiek, który wymyślił algebrę liniową, a w USA dzień 15 kwietnia to termin składania zeznań podatkowych za poprzedni rok.