AM1.1 — zadania 4

1. Dowieść, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = g$. Podać przykład takiego ciągu (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.

2. Dowieść, że jeśli zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to prawdziwy jest wzór $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = g$. Podać przykład takiego ciągu liczb dodatnich (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n}$.

3. Dowieść, że jeśli zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to prawdziwy jest wzór $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}} = g$. Podać przykład takiego ciągu liczb dodatnich (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots\frac{1}{b_n}}$.

4. Niech $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1}$, oraz $b_1 = 2$ i $b_{n+1} = \frac{2b_n+1}{b_n+1}$.
Udowodnić, że $\sup\{a_n : \quad n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n : \quad n \in \mathbb{N}\}$.

5. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ znaleźć $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
$\lfloor x \rfloor$ *oznacza największą liczbę całkowitą z półprostej* $(-\infty, x]$, *tzn.* $\sup\big((-\infty, x] \cap \mathbb{Z}\big)$.

6. Niech $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\big(\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor\big)$.

7. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją takie całkowite liczby k, l, że $|kx + l| < \frac{1}{n}$.

8. Podać przykład takiego ciągu (a_n) o granicy $+\infty$, że równość $\lim_{n\to\infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$ jest spełniona dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

9. Niech $a > b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Niech $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$. Niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ i $b_{n+1} = =\sqrt{a_n b_n}$ dla $n + 1, 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i to do wspólnej granicy.

10. Dowieść, że każda liczba z przedziału $[0, 1]$ jest granicą pewnego podciągu ciągu o wyrazie $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$.

11. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ obliczyć $\lim_{n\to\infty} n\big(\sqrt[k]{1 + \frac{1}{n}} - 1\big)$.

12. Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ obliczyć $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

13. Dany jest taki ciąg (a_n), że z każdego jego podciągu (a_{n_m}) można wybrać podciąg, którego granicą jest g. Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

14. Niech a i a_1 będą liczbami dodatnimi. Zdefiniujmy ciąg (a_n) indukcyjnie w następujący sposób: $a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + \frac{a}{a_n^2})$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} a_n$ w zależności od a.

15. Niech x będzie liczbą dodatnią. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \cdot \cdots \cdot (1 + x^{2^n})$ w zależności od x .

16. Dowieść, że jeśli istnieje $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$, to istnieje $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ i obie granice są równe. Czy z istnienia granicy $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ wynika istnienie granicy $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$?

17. Dowieść, że jeśli istnieje $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, to istnieje $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ i obie granice są równe.

18.* Niech $(a_{1,n})$, $(a_{2,n})$, $(a_{3,n})$, ... będą dowolnymi ograniczonymi ciągami liczb rzeczywistych. Udowodnić, że istnieje wtedy taki ściśle rosnący ciąg (n_m) liczb naturalnych, że wszystkie ciągi (a_{1,n_m}), (a_{2,n_m}), (a_{3,n_m}), ... są zbieżne — jest ich nieskończenie wiele!

19. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że wśród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 istnieje trójkąt o największym obwodzie. Można skorzystać z poprzedniego zadania.

20. Dane są takie koła K_1, K_2, ..., że dla każdego naturalnego n koła K_1, K_2, K_3, ..., K_n można tak umieścić w kwadracie Q, by ich wnętrza były parami rozłączne. Dowieść, że w kwadracie Q można tak umieścić wszystkie koła K_1, K_2, K_3, ..., by wnętrza każdej pary były rozłączne.

21. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich, który zawiera podciąg zbieżny do liczby 0. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele wskaźników n, dla których wyraz a_n jest mniejszy od wszystkich wyrazów, które go poprzedzają, tzn. istnieje nieskończenie wiele takich liczb k, że $a_k < a_j$ dla wszystkich numerów $j < k$.

22.* Załóżmy, że wyrazy niemalejącego ciągu (a_n) są dodatnie. Wykazać, że zbiór złożony z granic wszystkich podciągów ciągu $\left(\frac{a_n}{n+a_n}\right)$ jest przedziałem domkniętym.

23.* Niech (a_n) będzie ciągiem dodatnich liczb całkowitych. Definiujemy:

$$r_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots \cfrac{}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

Wykazać, że ciąg (r_n) jest zbieżny oraz że jego granica jest niewymierna.

24. Dowieść, że jeśli ciąg liczb całkowitych ma skończoną granicę, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

25. Znaleźć takie dwa ciągi (a_n) i (b_n), że $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim_{n\to\infty} b_n$ i $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

26. Znaleźć takie dwa ciągi (a_n) i (b_n), że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ i $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.