AM1.1 — zadania domowe 4, termin 20 listopada (piątek).

Definicja (przypomnienie):

Logarytmem naturalnym liczby $x > 0$ nazywamy taką liczbę $\ln x \in \mathbb{R}$, że $e^{\ln x} = x$.

1. Obliczyć granicę:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^{13112015} + 13112015n + \ln n)}{\ln(\sqrt{n^{20112015} + 1772} + 666n^{666} + 13)}.$$

3. Znaleźć taką liczbę $a \in \mathbb{R}$, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n^a} \in (0, \infty)$$

lub wykazać, że takiej liczby nie ma.

4. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + n^{3/2} + n + \sqrt{n} + 1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + 1444} \right)^n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + n^{3/2} + n + \sqrt{n} + 1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + 1444} \right)^{\sqrt{n}}$.

5. Niech $f(x) = 1 - 2|x|$. Niech $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb $a \in [-1, 1]$, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

Uwaga. Można dowieść, że istnieje taka liczba $a_1 \in [-1, 1]$, że dla każdej liczby $x \in [0, 1]$ istnieje podciąg ciągu (a_n), którego granicą jest liczba x.