Kolokwium z AM 2.2

25 kwietnia 2019,

Rozwiązanie każdego zadania **musi** mieścić się na oddzielnych kartkach. Proszę starannie podpisać (imię, nazwisko, nr indeksu, grupa ćwiczeniowa) wszystkie oddane arkusze! Wszystkie zadania są oceniane równo, w skali $0-10$ punktów; Wynik kolokwium zostanie przeskalowany przez $\frac{5}{4}$

Nie wolno korzystać z notatek, pomocy koleżeńskiej, kalkulatorów, telefonów ani innych środków telekomunikacji.

Zadanie 1. Niech $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

(a) (4 pkt.) Dla jakich liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $F\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$, dane wzorem

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{y^\alpha}, \frac{y}{x^\beta}\right)$$

jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}_+^2$ na siebie?

(b) (6 pkt.) Obliczyć $\int\limits_A g \,\mathrm{d}\lambda_2$, gdzie

$$g(x,y) = \frac{1}{x^2y^8}, \quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \ : \ \frac{2}{5}y < x^2 < 2y,\ y^3 < x < 2y^3\right\}.$$

Zadanie 2. Znaleźć środek ciężkości powierzchni jednorodnej M, jeśli

$$M = \left\{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant 9,\ 0 \leqslant x \leqslant 3,\ \frac{3}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\sqrt{27}}{2}\right\}.$$

Zadanie 3. Dla funkcji $f, g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definiujemy funkcję $f * g\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem $(f*g)(x) = \int\limits_0^\infty f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ oraz $\mathcal{L}(f)(x) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}t$.

(a) Udowodnić, że jeśli funkcje f i g są całkowalne na półprostej $(0,\infty)$, to funkcja jest dobrze określona dla prawie każdego $x \in (0,\infty)$.

(b) Dowieść, że jeśli $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i ciągła, a $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to $f*g$ jest ciągła.

(c) Wykazać, że jeśli f jest całkowalna na $(0,a)$ dla każdego $a > 0$, to $\mathcal{L}(f)$ jest ciągła.

(d) Dowieść, że jeśli funkcja $t \mapsto tf(t)$ jest całkowalna na $(0,\infty)$, to $\mathcal{L}(f)$ jest różniczkowalna.

(e) Udowodnić, że jeśli funkcje $f, g\colon (0,\infty) \to R$ są całkowalne, to $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$. Niech $f(x) = e^{-x^2}$. Obliczyć $\mathcal{L}(f)(x)$.

Zadanie 4. Przez χ_A oznaczamy funkcję charakterystyczną zbioru A. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną względem miary Lebesgue'a taką, że

$$\lambda_n(\{x : |f(x)| > t\}) \leqslant (1-t^4)\chi_{[0,1]}(t)$$

a) Uzasadnić, że $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\lambda_n(x) \leqslant \frac{4}{5}$.

b) Wykazać, że $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, \mathrm{e}^{|f(x)|}\, d\lambda_n(x) \leqslant 36\,\mathrm{e} - 96$

Czas na rozwiązanie: **150** minut