Analiza Matematyczna, 26 marca 2021 r

Rozwiązanie zadania 32. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^3 + y^3 = 3xy$.

Najpierw zobaczymy obszar, o który chodzi. Potraktujmy równość $x^3 + y^3 = 3xy$ jako równanie z niewiadomą x i parametrem y. Pytanie pierwsze to ile to równanie ma rozwiązań w zależności od parametru y. Niech $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Jasne jest, że ma co najmniej jedno i co najwyżej trzy. Mamy $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, więc jeśli $y \leqslant 0$, to funkcja $x \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ jest ściśle rosnąca, zatem ma jeden pierwiastek. Ten pierwiastek jest dodatni, bo wartość tej funkcji w punkcie 0 jest równa y^3, więc jest niedodatnia. Jeśli $y > 0$, to sytuacja zmienia się, bo na przedziale $[-\sqrt{y}, \sqrt{y}]$ funkcja jest ściśle malejąca. Mamy $(-\sqrt{y})^3 + y^3 - 3(-\sqrt{y})y = 2y\sqrt{y} + y^3 = (\sqrt{y})^3\left(2 + (\sqrt{y})^3\right) > 0$, zatem funkcja ma pierwiastek **mniejszy** od $-\sqrt{y}$. Zachodzi równość $(\sqrt{y})^3 + y^3 - 3(\sqrt{y})y = (\sqrt{y})^3\left((\sqrt{y})^3 - 2\right)$. To wyrażenie jest dodatnie gdy $y > \sqrt[3]{4}$ i wtedy funkcja nie ma dodatnich pierwiastków. Dla $y = \sqrt[3]{4}$ jedynym (ale podwójnym) dodatnim pierwiastkiem jest $\sqrt{2}$, a jedynym ujemnym jest $-2\sqrt[3]{2}$. Gdy $0 < y < \sqrt[3]{4}$, to funkcja ma dwa dodatnie pierwiastki. Jeden z nich jest mniejszy od $\sqrt[3]{y}$ a drugi — większy. Niech $x = y^2 g(y)$. Jeśli $0 = f(x, y) = f(y^2 g(y), y) = y^6 g(y)^3 + y^3 - 3y^3 g(y)$, to $y^3 g(y)^3 + 1 - 3g(y) = 0$. Z twierdzenia o funkcjach uwikłanych lub z twierdzenia o odwracaniu funkcji jednej zmiennej wynika od razu, że istnieje określona w pewnym otoczeniu 0 funkcja g i to funkcja klasy C^∞, dla której ta równość zachodzi. Wykres funkcji $x = y^2 g(y)$ jest więc styczny w punkcie $(0, 0)$ do osi OY. Ponieważ $f(y, x) = f(x, y)$, więc również $f(x, x^2 g(x)) = 0$, a to oznacza, że zbiór zdefiniowany równaniem $f(x, y)$ zawiera wykresy funkcji $x \mapsto x^2 g(x)$ oraz $y \mapsto y^2 g(y)$ stycznych odpowiednio do osi OX i OY, więc zawiera „krzyżyk". Nie jest więc rozmaitością. Staje się nią po usunięciu punktu $(0, 0)$. Część wspólna tego zbioru z pierwszą ćwiartką układu współrzędnych jest ograniczona — udowodniliśmy, że jest zawarta w kwadracie zdefiniowanym nierównościami $0 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{4}$ oraz $0 \leqslant y \leqslant \sqrt[3]{4}$.

Niech $= r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Mamy $f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - 3r^2\cos\theta\sin\theta$, a stąd wynika, że jeśli $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$, to $r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3\cos\theta\sin\theta$, zatem $r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$. Wynika stąd, że kąt θ wyznacza r jednoznacznie, więc na każdej półprostej wychodzącej z punktu $(0, 0)$ zawartej w pierwsze ćwiartce jest dokładnie jeden taki punkt (x, y), że $f(x, y) = 0$. Oznacza to, że pole o które chodzi, równe jest $\int_0^{\pi/2}\int_0^{3\cos\theta\sin\theta/(\cos^3\theta+\sin^3\theta)} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{9\cos^2\theta\sin^2\theta}{2(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}d\theta =$
$= \int_0^{\pi/2}\frac{9\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{2\cos^2\theta(1+\mathrm{tg}^3\,\theta)^2}d\theta \;\overset{u=\mathrm{tg}\,\theta}{\underset{du=d\theta/\cos^2\theta}{=\!=\!=}}\; \int_0^\infty \frac{9u^2}{2(1+u^3)^2}du \;\overset{v=u^3}{\underset{dv=3u^2du}{=\!=\!=}}\; \int_0^\infty \frac{3}{2(1+v)^2}dv = \frac{-3}{2(1+v)}\Big|_0^\infty = \frac{3}{2}$. Obliczyliśmy pole obszaru.

Z bardzo formalnego punktu widzenia w pierwszej części jest za dużo tekstu, bo niektóre informacje nie służą obliczeniu pola. Jednak uważam, że powinni Państwo zrozumieć ską naprawdę bierze się rysunek, którego w tym tekściku nie ma (ale był na tablicy w czasie zajęć). Tym razem wszystkie drobne fakty zostały uzasadnione. Mam nadzieję, że powyżej błędów nie ma. Gdyby jednak Państwo znaleźli, proszę o wiadomość.