

Całki krzywoliniowe

Szanowni Państwo,

Miłośników topologii i pozostałe osoby zachęcam do przeczytania pierwszej połowy strony 5 tekstu <https://www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM2skrypt/am2cz13L-krzywe.pdf>. Bez informacji tam zawartych też można żyć, ale co to za życie... A ci z Państwa, którzy topologię lubią mogą przeczytać coś o sferze Alexandra, tzw. sferze rogatej. Formalnie to do całek krzywoliniowych nic nie ma, ale chodzi o to, że pewne rzeczy kiedyś uważano za całkiem oczywiste, a potem okazało się, że część z nich jest nieprawdziwa.

I jeszcze jedna uwaga. W zasadzie symbol dx należy rozumieć jako rzut \mathbb{R}^2 na pierwszą oś standardowego układu współrzędnych. Można więc napisać $dx(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2) = 5$. Podobnie jest z drugim symbolem dy : $dy(5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2) = 7$. Analogicznie jest w wyższych wymiarach. Używając terminologii z GAL-u baza $\{dx, dy\}$ to baza $(\mathbb{R}^2)^*$ dualna do bazy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

41. Obliczyć całkę $\int_K (2x + y) dx + (x - 2y) dy$ wzdłuż następującej krzywej $K = \{(x, y): x^4 + y^3 = 1; x \leq 0 \leq y\}$, zorientowanej tak, że jej początkiem jest punkt $(0, 1)$, a końcem punkt $(-1, 0)$.
42. Niech $K = \{(x, y): 4x^2 + y = 5, y \geq 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x . Obliczyć całkę $\int_K \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ wzdłuż krzywej K .
43. Zbadać, czy forma $\omega = |x + y| dx + |x + y| dy$ ma w obszarze $G = \mathbb{R}^2$ własność niezależności całki od drogi (tzn. czy dla każdej pary punktów $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in G$ i dla każdej krzywej $\gamma: [a, b] \rightarrow G$, o początku $\mathbf{x} = \gamma(a)$ i końcu $\mathbf{z} = \gamma(b)$, wartość $\int_\gamma \omega$ jest taka sama).
44. Zbadać, czy forma $\omega = \frac{y dx - x dy}{x^2 + xy + y^2}$ ma w obszarze $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ własność niezależności całki od drogi (tzn. czy dla każdej pary punktów $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in G$ i dla każdej krzywej $\gamma: [a, b] \rightarrow G$, o początku $\mathbf{x} = \gamma(a)$ i końcu $\mathbf{z} = \gamma(b)$, wartość $\int_\gamma \omega$ jest taka sama).
45. Niech $\omega = f dx + g dy$ będzie formą klasy C^1 w obszarze $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, zamkniętą ($\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$). Udowodnić, że istnieje liczba $c \in \mathbb{R}$ oraz funkcja (klasy C^2) $u: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $\omega = c \cdot \omega_0 + du$, gdzie $\omega_0 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.
46. Obliczyć całkę $\int_C \frac{(\sinh x) dy - (\sin y) dx}{\cosh x - \cos y}$ po okręgu jednostkowym $C = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$, zorientowanym dodatnio („przeciwie niż zegarek”).
47. Niech $\gamma(t) = (t^3 - 3t, t^4 - 2t^2)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Zbiór $\gamma(\mathbb{R})$ rozcina płaszczyznę na kilka obszarów, z których jeden jest ograniczony. Obliczyć jego miarę płaską.
48. Niech $\omega = \frac{y^2 dx - 2xy dy}{x^2 + y^4}$. Obliczyć całkę z tej formy wzdłuż półokręgu $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ o początku $(1, 0)$ i końcu $(-1, 0)$.

49. Niech $G \subseteq \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Funkcja $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ma *pochodną zespoloną* w punkcie $z_0 \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (skończona) granica $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Utożsamiamy liczby $z \in \mathbb{C}$ z punktami $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ($z = x + iy$). Niech $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ($u, v: G \rightarrow \mathbb{R}$).

Dowieść, że jeśli f ma pochodną zespoloną w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, to funkcje u, v są w punkcie (x_0, y_0) różniczkowalne oraz spełniają w tym punkcie obydwie równości $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

50. Niech $\gamma: S^1 \rightarrow G \subseteq \mathbb{C}$ będzie krzywą Jordana kawałkami klasy C^1 , gdzie G jest obszarem, zawierającym $\gamma(S^1)$ wraz z ograniczoną składową zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$. Załóżmy, że funkcja $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ma ciągłą pochodną zespoloną w każdym punkcie zbioru G . Obliczyć $\int_{\gamma} f(z) dz$ czyli $\int_C (u + i v)(dx + i dy)$.

Uwaga. W tym zadaniu założenie ciągłości f' jest zbędne, dodaliśmy, bo inaczej należałoby to stwierdzenie udowodnić, a nie o to w tym zadaniu chodzi.

51. Korzystając z twierdzenia z poprzedniego zadania, obliczyć całki niewłaściwe $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$, $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$. [Można rozważyć funkcję $f(z) = e^{iz^2}$; i krzywą Jordana złożoną z odcinka osi rzeczywistej, łuku okręgu oraz odcinka prostej $x = y$.]

52. Niech C oznacza brzeg obszaru $D = \{(x, y): 0 < y < x \ln \frac{1}{x}\}$. Obliczyć $\int_C (x + y)dx - xdy$.