Analiza Matematyczna, 26 marca 2021 r

35. Znaleźć środek ciężkości jednorodnego łuku okręgu zdefiniowanego tak:
$\{(r\cos t, r\sin t): \quad |t| \leqslant \alpha\}$, gdzie $r > 0$ i $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ sa danymi liczbami rzeczywistymi.

36. Znaleźć pole powierzchni (miarę Lebesgue'a – Riemanna) zbioru $\{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2, a \leqslant z \leqslant b\}$, gdzie $r > 0, a, b$ są takim liczbami rzeczywistymi, że $-r < a < b < r$.

37. Znaleźć środek ciężkości jednorodnej półsfery $\{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geqslant 0\}$.

38. Wykazać, że jeśli punkt materialny znajduje się wewnątrz jednorodnej sfery materialnej, to sfera nie oddziałuje na niego grawitacyjnie.

39. Znaleźć masę miseczki parabolicznej $2z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, której gęstość masy równa jest $\varrho(x, y, z) = z$.
Masa to całka z gęstości względem miary Lenesque – Riemanna.

40. Znaleźć pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu:

a. łuku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, |y| \leq 4$ wokół osi OX;

b. krzywej $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ wokół osi OX.

41. Wykazać, że długość elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ jest liczbą z otwartego przedziału $\left(\pi(a+b), \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}\right)$.

42. Niech F oznacza brzeg kostki

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4): \quad 0 \leq x_i \leq 1 \ \text{ dla } \ i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Znaleźć $\int_F x_1x_2x_3x_3 \mathrm{d}\ell_F$.

43. Znaleźć całkę $\int_M |xyz| \mathrm{d}\ell_M$, gdzie $M = \{(x, y, z): \quad x^2 + y^2 = z < 1\}$.

44. Znaleźć całkę $\int_M z \mathrm{d}\ell_M$, gdzie

$$M = \{(x, y, z): \quad x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = v, \ 0 < u < a, \ 0 < v < 2\pi\}.$$

45. Znaleźć całkę $\int_M (xy + yz + zx) \mathrm{d}\ell_M$, gdzie M oznacza część powierzchni stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ wyciętą przez powierzchnię o równaniu $x^2 + y^2 = 2ax$.

46. Znaleźć współrzędne środka ciężkości jednorodnej powierzchni M określonej w poprzednim zadaniu.