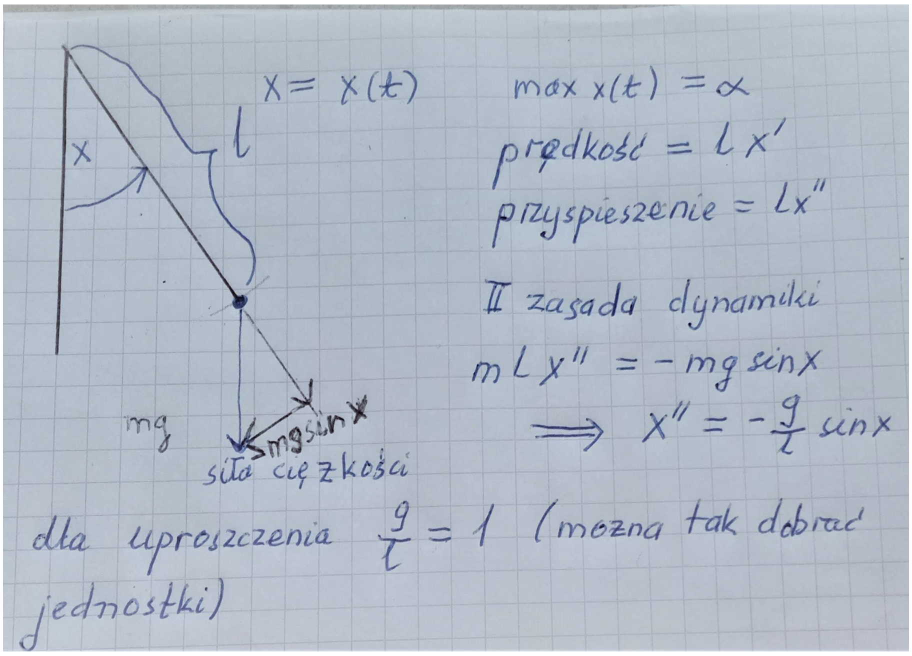
Analiza Matematyczna, 1 marca 2021 r

Obrazek to wspomnienie ze szkoły, mam nadzieję, że w miarę czytelne. Zrobiłem ręcznie, bo nie mogę porozumieć się ze swoim programem do rysowania porządniejszego.



Równanie wahadła matematycznego uproszczone w wyniku doboru jednostek $x''(t) = -\sin x(t)$. W dalszym ciągu zmienną t zwykle będziemy opuszczać, zatem będziemy pisać $x'' = -\sin x$.

Pomnóżmy to równanie przez x'. Otrzymujemy $\frac{1}{2}((x')^2)' = x'x'' = -x'\sin x = (\cos x)'$. Wobec tego funkcja (zmiennej t) $\frac{1}{2}(x')^2 - \cos x$ jest stała. Oznaczmy tę stałą przez $-\cos\alpha$ tzn. zakładamy, że ta stała nie jest duża, ale ponieważ zajmiemy się wahadłem i zamierzamy myśleć o niezbyt dużej amplitudzie, więc to założenie jest usprawiedliwione. Fizycy nazywają funkcję $\frac{1}{2}(x')^2 - \cos x$ energią całkowitą, składnik $\frac{1}{2}(x')^2$ — energią kinetyczną, składnik $-\cos x$ — energią potencjalną. Z otrzymanego równania wynika, że $x' = \pm\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}$. Rozważać będziemy jeden przypadek:

$$x' = \sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}\,.$$

Kąt x zmienia się od $-\alpha$ do α. Mamy $1 = \frac{x'}{\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}}$. Niech $x(T) = \alpha$. Wtedy

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{x'dt}{\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}} = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}} = \int_0^1 \frac{\alpha dr}{\sqrt{2(\cos(\alpha r) - \cos\alpha)}}$$

Zmieniliśmy zmienną dwukrotnie. W rezultacie mamy całkę z funkcji zależnej od α po ustalonym przedziale $[0,1]$. Możemy więc pomyśleć o przejściu do granicy przy $\alpha \longrightarrow 0$. Zakładamy też, że $\alpha, T > 0$. Zachodzą równości $2(\cos(\alpha r) - \cos\alpha) = 4\sin\frac{\alpha+\alpha r}{2}\sin\frac{\alpha-\alpha r}{2} = 4\sin\alpha\frac{1+r}{2}\sin\alpha\frac{1-r}{2}$. Wiemy również, że $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha\frac{1+r}{2}}{\alpha} = \frac{1+r}{2}$ oraz $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha\frac{1-r}{2}}{\alpha} = \frac{1-r}{2}$ przy czym z wklęsłości sinusa na przedziale $[0,\pi]$ wynika, że funkcje $\alpha \mapsto \frac{\sin\alpha\frac{1+r}{2}}{\alpha}$ i $\alpha \mapsto \frac{\sin\alpha\frac{1-r}{2}}{\alpha}$ są malejące, więc funkcja $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}}$ jest rosnąca. Jeśli ciąg (α_n) jest malejący i zbieżny do 0, to ciąg $\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha_n)}}\right)$ jest rosnący. Z poprzednio uzyskanych równości wynika, że jest zbieżny do $\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ przynajmniej, gdy $0 \leqslant r < 1$. Zachodzi równość $\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki lub z twierdzenia Lebesque'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki stwierdzamy, że

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}} = \lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{\alpha dr}{\sqrt{2(\cos(\alpha r) - \cos\alpha)}} = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Otrzymaliśmy wynik równoważny temu, comożna usłyszeć na lekcjach fizyki w szkole (jeśli ktoś akurat słucha).

Myśląc o całce Lebesgue'a nie musimy się przejmować punktem 0, bo zbiłór jednopunktowy ma miarę 0, więc jest nieistotny. Twierdzenia Lebesgue'a o przechodzeniu do granicy dla tej całki zachodzą.

Niech $T(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}} = \int_0^1 \frac{\alpha dr}{\sqrt{2(\cos(\alpha r) - \cos\alpha)}}$ dla $\alpha \in (0.\pi)$ i $T(0) = \frac{\pi}{2}$.

ZADANIA

1. Obliczyć $T'(0)$.

2. Obliczyć $\lim\limits_{\alpha\to\pi} T(\alpha)$.
oraz zadania 8.1, 8.3 i 8.4 z pliku
https://www.mimuw.edu.pl/ krych/matematyka/AM2skrypt/am2cz08L.pdf