Analiza Matematyczna, 12 marca 2021 r

21. Niech $f \in L^1$ i $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$. Definiujemy $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{v})$. Udowodnić, że odwzorowanie $\mathbb{R}^k \ni \mathbf{v} \mapsto f_{\mathbf{v}} \in L^1(\mathbb{R}^k)$ jest jednostajnie ciągłe.

22. Niech T oznacza czworościan foremny, którego wierzchołkami są $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,\sqrt{2})$, $(0,-1,\sqrt{2})$. Niech B będzie bryłą powstałą w wyniku obrotu czworościanu T wokół osi OZ, tzn. $B = \{R_\alpha(p)\colon \quad p \in T,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, gdzie R_α oznacza obrót wokół osi z o kąt α. Obliczyć objętość (trójwymiarową miarę Lebesgue'a) bryły B.

23. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oznacza funkcję całkowalną w sensie Lebesgue'a ($f \in L(\mathbb{R})$). Niech $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. Wykazać, że:
(a) g jest dobrze określona na $\mathbb{R}$,
(b) g jest ciągła na $\mathbb{R}$,
(c) g ma ciągłą pochodną na $\mathbb{R}$.
(d) Czy g jest funkcją klasy C^2 na całej prostej?

24. Dane są liczby $a > b > 0$. Obliczyć $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$.

25. Obliczyć objętość (miarę trójwymiarową) bryły

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \quad 4x^2 + y^2 < 4, \quad x > 0, \quad x^2 > z > 0\}.$$

26. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $2xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $x = 2y$, $z = 0$, $yz = 1$; $x, y > 0$.
Wyjaśnienie: w zbiorze $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x > 0,\ y > 0\}$ te równania opisują pewne powierzchnie, które dzielą ów zbiór na kilka obszarów; jeden z nich jest ograniczony, i to jest bryła B.

27. Znaleźć środek ciężkości półkuli trój– i k–wymiarowej.

28. Niech $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $r > 0$. Znaleźć środek ciężkości zbioru

$$\{(x,y)\colon \quad 0 \leqslant x \leqslant r\cos\alpha,\ |y| \leqslant x \operatorname{tg}\alpha\}.$$

29. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$.

30. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

31. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

32. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geqslant a^2 > 0$, gdzie $a \in (0, \sqrt{2})$.

33. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^3 + y^3 = 3xy$.

34. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ i osiami układu współrzędnych.