Całki krzywoliniowe (cd.) i funkcje harmoniczne

Jeśli w zadaniu występuje całka po krzywej Jordana i nie jest wskazana orientacja, to należy przyjąć, że chodzi o przeciwną do ruchu wskazówek normalnego zegara. Krzywa Jordana to krzywa zamknięta bez samoprzecięć, więc mówiąc krótko: obraz homeomorficzny okręgu. Można więc uważać, że to obraz odcinka domkniętego przez przekształcenie ciągłe, różnowartościowe po ograniczeniu dziedziny przez usunięcie jednego z końców, przy czym oba końce są przekształcane na ten sam punkt.

53. Niech $f, g\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ będą dwiema funkcjami klasy C^2 określonym w zbiorze otwartym $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Niech $\gamma\colon S^1 \longrightarrow G \subseteq \mathbb{C}$ będzie krzywą Jordana przedziałami klasy C^1, gdzie G jest obszarem, zawierającym $\gamma(S^1)$ wraz z ograniczoną składową zbioru $D = \mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$. Symbol $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{n}}$ oznacza pochodną w kierunku wektora jednostkowego $\mathfrak{n}$ prostopadłego do brzegu krzywej γ i skierowanego na zewnątrz D. Udowodnić, że $\int_\gamma (f\frac{\partial g}{\partial \mathfrak{n}})d\ell_\gamma = \int (\text{grad } f \cdot \text{grad } g)d\ell_2 + \int_D (f\triangle g)d\ell_2$ oraz $\int_\gamma (f\frac{\partial g}{\partial \mathfrak{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{n}})d\ell_\gamma = \int_D (f\triangle g)d\ell_2 - \int_D (g\triangle f)d\ell_2$

Definicja. Jeśli $\triangle u(x, y) = 0$ dla każdego $(x, y) \in D$, to mówimy, że funkcja U jest harmoniczna w zbiorze D. $\square$

54. Udowodnić, że jeśli funkcja u jest harmoniczna w zbiorze otwartym zawierającym krzywą Jordana C kawałkami klasy C^1, to $\int_C \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{n}} d\ell_C = 0$.

55. Niech $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ i niech u będzie funkcją u harmoniczną w kole otwartym K o środku $(0, 0)$. Niech $D \subset K \setminus \{(0, 0)\}$ będzie zbiorem otwartym, którego brzeg $\partial D \subset K \setminus \{(0, 0)\}$ jest sumą skończenie wielu krzywych Jordana. Udowodnić, że to $\int_{\partial D} \left(f\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{n}} - u\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{n}}\right) d\ell_{\partial D} = 0$.

56. Niech $B(r)$ będzie kołem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r > 0$ zawartym wewnątrz dziedziny funkcji harmonicznej U, a $C(r)$ niech oznacza okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r. Udowodnić, że wtedy zachodzą równości

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C(r)} u(x, y)d\ell_{C(r)} = \frac{2}{\pi r^2}\int_{B(r)} u(x, y)d\ell_2.$$

57. Udowodnić, że funkcja harmoniczna, która przyjmuje są największą wartość w wewnętrznym punkcie $\mathbf{p}$ swej dziedziny jest stała na składowej spójności zawierającej punkt $\mathbf{p}$.

58. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ w przecięciu z płaszczyzną $x + y + z = 3$ tworzy okrąg. Niech γ będzie krzywą opisującą łuk tego okręgu o początku $(2, 2, -1)$ i końcu (0,3,0), zawarty w półprzestrzeni $\{(x, y, z)\colon \quad y > 0\}$. Obliczyć $\int_\gamma \frac{yzdx - zxdy + xydz}{y^2}$.

59. Niech $\omega = \frac{1}{\sqrt{x+y}}\big((3x + 2y)dx + xdy\big)$. Obliczyć całkę $\int_C \omega$ wzdłuż łuku okręgu $C = \{(x, y)\colon \quad x^2 + y^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ o początku $(1, 0)$ i końcu $(0, 1)$.

60. Niech $\omega = \frac{x(x^2+y^2-1)dy - y(x^2+y^2+1)dx}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}$. Obliczyć całki $\int_{C_1} \omega$, $\int_{C_2} \omega$, $\int_{C_3} \omega$, gdzie $C_1 = \{(x, y)\colon \quad (x+1)^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$, $C_2 = \{(x, y)\colon \quad (x-1)^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$, $C_1 = \{(x, y)\colon \quad x^2 + y^2 = 4\}$.

61. Obliczyć całkę formy różniczkowej $\omega = \frac{2xy\,dx - (x^2+y^2)dy}{y^2}$ wzdłuż łuku krzywej określonej równaniem $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{6}\sqrt{x^2 + y^2}$, mającego początek $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ i koniec $(1, \sqrt{3})$, położonego w ćwiartce $\{(x, y)\colon \quad x, y > 0\}$.

62. Niech $C = \{(x,y,z)\colon \quad x^2+y^2 = 1 \ \text{ i } \ z = xy\}$. Wykazać, że C jest zwartą i spójną rozmaitością jednowymiarową.

Niech $\omega(x,y,z) = ydx + zdy + xdz$ i niech wektor $(0,1,1)$ styczny do C w punkcie $(1,0,0)$ wyznacza orientację rozmaitości C. Obliczyć $\int_C \omega$.

63. Niech $\omega = ((x+1)dy - ydx)((x+1)^2 + y^2) - ((x-1)dy - ydx)((x-1)^2 + y^2))$.

Wykaż, że istnieje $f\colon \mathbb{R}^2 - [-1,1] \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\omega = df$, ale nie istnieje taka fukcja $g\colon \mathbb{R}^2 - \{(1,0),(-1,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\omega = dg$.

64. Dla formy $\eta = (2y^3 + 2x^2y - 6y)dx + (-2xy^2 + 4x^2y + 2x)dy$ znajdź krzywą γ w $\mathbb{R}^2$, zamkniętą, spójną, gładką i bez samoprzecięć taką, żeby $\int_\gamma \eta$ była możliwie największa.

Wskazówka: krzywa γ ogranicza pewien obszar.

65. Niech $\omega = \dfrac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2 + y^2} - \dfrac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2}$.

Wykazać, że istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 - [-1,1] \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\omega = df$, ale nie ma takiej funkcji $g\colon \mathbb{R}^2 - \{(1,0),(-1,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\omega = dg$.