Analiza Matematyczna, 12 marca 2021 r

11. Zdefiniować miarę na podzbiorach borelowskich płaszczyzny tak, aby środek ciężkości obwodu trójkąta był środkiem ciężkości względem tej miary. Definicja np. na stronie 12 pliku `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM2skrypt/am2cz09L.pdf`

12. Udowodnić, że jeśli środek ciężkości obwodu trójkąta jest punktem przecięcia jego środkowych, to trójkąt jest równoboczny.

13. Znaleźć środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$ względem dwuwymiarowej miary Lebesgue'a

14. Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary Lebesgue'a na $(0,\infty)$. Niech $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}dt$. Dowieść, że funkcja $\mathcal{L}(f)\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞. *Można zacząć od wykazania ciągłości.*

15. Niech $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \max(-2x, x-1) < y < \min(1-2x, x+1)\}$. Obliczyć (z dokładnym uzasadnieniem) granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_H \Big(\frac{2x+y+n}{n}\Big)^n dx\, dy$.

16. Niech $f\colon [0,\infty)$ będzie ograniczoną funkcją ciągłą.
Wykazać, że $\displaystyle\lim_{y\to 0} \int_0^\infty \tfrac{yf(x)}{x^2+y^2}dx = \tfrac{\pi}{2}f(0)$.

17. Obliczyć (może można zróżniczkować względem a)

a. $\int_0^1 \frac{t^a-1}{\ln t}dt$; **b**. $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx$;

c. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}}dx, a>0$; **d**. $\int_0^1 x^{a-1}\big(\ln x\big)^n dx, a>1$.

W czasie ćwiczeń udowodniliśmy, że $\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^a-1}{\ln t} = a$ (to łatwiutkie), więc nie ma kłopotu ze zbieżnością w otoczeniu 1. Okolice zera też badaliśmy. $\int_0^1 \frac{t^a-1}{\ln t} \xlongequal[dt=e^u du]{t=e^u} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{au}-1}{u}e^u du$. Mamy $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{au}-1}{u}e^u du = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{(a+1)u}-e^u}{u}du$. Zachodzi oczywista równość $\int_{-\infty}^{-1} e^u du = e^{-1}$, a ponieważ dla $u \leqslant -1$ zachodzi nierówność $\left|\frac{e^u}{u}\right| \leqslant e^u$, więc funkcja $\frac{e^u}{u}$ jest całkowalna na półprostej $(-\infty,-1]$. Podobne argumenty dowodzą, że jeśli $a > -1$, to funkcja $\frac{e^{au}}{u}$ jest całkowalna na półprostej $(-\infty,-1]$ a jeśli $a \leqslant -1$, to $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{au}}{u}du = -\infty$. Na tym ćwiczenia zakończyły się niestety, więc trzeba jeszcze pomyśleć o zadaniu 17a.

18. Niech B będzie zbiorem mierzalnych (w sensie λ_{k-1}) zawartym w przestrzeni $\mathbb{R}^{k-1}\times\{0\}$ i niech $\mathbf{v} = (\mathbf{b}_0, h)$, $h > 0$, oznacza punkt spoza przestrzeni $x_k = 0$. W trakcie ćwiczeń udowodniliśmy, że jeśli $\operatorname{conv}(B,\mathbf{v})$ jest sumą wszystkich odcinków zaczynających się w punkcie $\mathbf{v}$ i kończących się w punkcie zbioru B — stożkiem o wierzchołku $\mathbf{v}$ i podstawie B, to $\lambda_k(conv(B,\mathbf{v})) = =\frac{h}{k}\lambda_{k-1}(B)$. Wyrazić środek ciężkości zbioru $conv(B,\mathbf{v})$ za pomocą środka ciężkości zbioru B (względem miary λ_{k-1}) i wierzchołka $\mathbf{v}$.

19. (na „prośbę” prof. Bodnara). Udowodnić, że $f * g = g * f$ dla dowolnych funkcji całkowalnych na $\mathbb{R}^k$.

20. (na „prośbę” prof. Bodnara). Udowodnić, że $(f * g) * h = f * (g * h)$ dla dowolnych funkcji całkowalnych na $\mathbb{R}^k$.