Analiza Matematyczna, 12 kwietnia 2021 r

Rozwiązanie zadania 9 (przygotowawczego): Niech $\Lambda \subset [0,1]$ będzie zbiorem mierzalnym i niech $f(x) = \lambda_1(\Lambda \cap [0,x])$. Wykaż, że

$$\int_\Lambda f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lambda_1(\Lambda)^2\ .$$

Najpierw uwaga. Uzyskany wzór w pierwszej części rozmyślań nad tym zadaniem był jednak poprawny. Niech $\Lambda = [a,b] \subseteq [0,1]$. Wtedy dla $x \in [0,a]$ mamy $f(x) = 0$, dla $x \in (a,b)$ mamy $f(x) = x-a$, dla $x \in [b,1]$ mamy $f(x) = b-a$. Stąd natychmiast wynika, że $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)(1-a+1-b)$ tak, jak to było napisane na tablicy. Inna rzecz, że mieliśmy napisać $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)^2 1$, bo całka miała być po zbiorze Λ a nie po przedziale $[0,1]$. Wtedy wszystko zgadza się.

A teraz uwaga, której nie wypowiedziałem w czasie ćwiczeń, choć chciałem. Jeśli $\lambda_1(\Lambda_1 \dot{-} \Lambda_2) < \varepsilon$ i f_1, f_2 są funkcjami odpowiadającymi tym zbiorom, to $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$ dla każdego x, więc również $\left|\int_{\Lambda_1} f_1(x)dx - \int_{\Lambda_2} f_2(x)\right| < \varepsilon$ oraz $\left|\frac{1}{2}\lambda_1(\Lambda_1)^2 - \frac{1}{2}\lambda_1(\Lambda_2)^2\right| = \frac{\lambda_1(\Lambda_1)+\lambda_1(\Lambda_2)}{2} \cdot |\lambda_1(\Lambda_1) - \lambda_1(\Lambda_2)| < \varepsilon$, bo $\lambda_1(\Lambda_1) = \lambda_1(\Lambda_1 \setminus (\Lambda_1 \cap \Lambda_2)) + \lambda_1(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$ i $\lambda_1(\Lambda_2) = \lambda_1(\Lambda_2 \setminus (\Lambda_1 \cap \Lambda_2)) + \lambda_1(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$.

Dla każdego zbioru mierzalnego Λ istnieje taki nadzbiór otwarty U , że $\lambda_1(U \setminus \Lambda) < \varepsilon$. U jest sumą przeliczalnej rodziny parami rozłącznych przedziałów otwartych $I_1, I_2, \ldots$. Wobec tego istnieją takie przedziały $I_1, I_2, \ldots, I_n$, że jeśli $\Lambda_1 = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$, to $\lambda_1(\Lambda \dot{-} \Lambda_1) < \varepsilon$. Stąd teza w wypadku ogólnym wynika szybko i bezboleśnie (prawie).

Jednak nie o takim rozwiązaniu zapewne myślał autor zadania, choć to jego, a nie nasz problem. Pokażemy jednak to inne rozwiązanie, o którym autor myślał prawie na pewno.

Niech $g(u,x) = \mathbb{1}_\Lambda(u) \cdot \mathbb{1}_\Lambda(x)$. Z twierdzenia Fubiniego wynika, że $\int_{[0,1]\times[0,1]} g(u,x)d\lambda_2 = \lambda_1(\Lambda)^2$. Niech $T = \{(u,x)\colon \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, u \leqslant x \leqslant 1\}$, tzn. T jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0), (1,1), (0,1)$. Teraz możemy napisać: $\int_T g(u,x)d\lambda_2 = \int \lambda_1(\Lambda \cap [0,x])d\lambda_1(x) = \int_\Lambda f(x)d\lambda_1(x)$ – skorzystaliśmy z twierdzenia Fubiniego. Całkując w innej kolejności otrzymujemy:

$\int_T g(u,x)d\lambda_2 = \int \lambda_1(\Lambda \cap [1-u,1])d\lambda_1(u) = \int \lambda_1(\Lambda \cap [1-x,1])d\lambda_1(x)$ – ostatnia zmiana zmiennej to tylko stwierdzenie, że wartość całki nie zależy od nazwy zmiennej. Z dwu ostatnich równości wynika, że $\int_{[0,1]\times[0,1]} g(u,x)d\lambda_2 = \int \lambda_1(\Lambda \cap [0,x])d\lambda_1(x) + \int \lambda_1(\Lambda \cap [1-x,1])d\lambda_1(x) = 2\int \lambda_1(\Lambda \cap [0,x])d\lambda_1(x) =$ $= 2\int_\Lambda f(x)d\lambda_1(x)$, a stąd teza wynika od razu.

Drugie rozwiązanie w rzeczywistości zostało wymyślone w końcówce ćwiczeń.