Zadanie 14 z pierwszego zestawu.

Obliczyć pole obszaru $A := \{(x,y)\colon \quad (x^3+y^3)^2 = x^2+y^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

Niech $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Wtedy $(x^3+y^3)^2 = r^6(cos^3 t+\sin^3 t)^2$, $x^2+y^2 = r^2$, więc równanie wygląda tak $r^4(cos^3 t+\sin^3 t)^2 = 1$.

Ponieważ $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, więc $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ oraz $0 < r \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{(\cos^3 t+\sin^3 t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^3 t+\sin^3 t}}$.

Poszukiwane pole jest równe

$$\int_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{1/\sqrt{\cos^3 t+\sin^3 t}} \int_0^{\pi/2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3 t+\sin^3 t}\mathrm{d}t.$$

Podstawimy $z = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Wtedy $\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+z^2)\mathrm{d}t$, $\cos t = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $\sin t = \frac{2z}{1+z^2}$, więc

$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3 t+\sin^3 t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1+z^2)^2}{(1-z^2)^3+8z^3}\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1+2z^2+z^4}{(1+2z-z^2)(z^4+2z^3+2z^2-2z+1)}\mathrm{d}z$. Czas na drobne oszustwo.

Mamy $z^4+2z^3+2z^2-2z+1 = z^4+2z^3+5z^2+4z+4-3z^2-6z-3 = (z^2+z+2)^2-3(z+1)^2 = (z^2+z+2)^2-3(z+1)^2 = (z^2+(1-\sqrt{3})z+2-\sqrt{3})(z^2+(1+\sqrt{3})z+2+\sqrt{3})$. Rozłożyliśmy mianownik na czynniki. Oszustwo jest drobne, bo ta metoda rozkładania na czynniki jest w zasadzie ogólna – to jeden ze sposobów uzyskania wzorów na pierwiastki równania czwartego stopnia, oczywiście nie zaprezentowany tu w pełni, a tylko w tym szczególnym wypadku. To, co pojawiło się w trakcie ćwiczeń było bardziej naturalne i łatwiejsze do odtworzenia. Spróbujemy zapisać funkcję $\frac{1+2z^2+z^4}{(1+2z-z^2)(z^4+2z^3+2z^2-2z+1)}$ w postaci $\frac{A}{1+2z-z^2} + \frac{B}{z^2+(1-\sqrt{3})z+2-\sqrt{3}} + \frac{C}{z^2+(1+\sqrt{3})z+2+\sqrt{3}}$. Ogólne twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste wymagałoby dłuższych liczników, ale wiemy, że jeśli uda znaleźć się rozkład, to scałkujemy funkcję. Powinna zachodzić równość

$$z^4+2z^2+1 = A(z^4+2z^3+2z^2-2z+1) + \\ + B(1+2z-z^2)(z^2+(1+\sqrt{3})z+2+\sqrt{3}) + C(1+2z-z^2)(z^2+(1-\sqrt{3})z+2-\sqrt{3}).$$

To jest możliwe wtedy jedynie, gdy spełnione są równości

$A-B-C = 1,\ \ 2A+(1-\sqrt{3})B+(1+\sqrt{3})C = 0$ i $A+B(2+\sqrt{3})+C(2-\sqrt{3}) = 1$.

Pozbywamy się $A = B+C+1$: $(3-\sqrt{3})B+(3+\sqrt{3})C = -2,\ \ B(3+\sqrt{3})+C(3-\sqrt{3}) = 0$.

Dodajemy te równości stronami: $6(B+C) = -2$, więc $B+C = -\frac{1}{3}$ i wobec tego $A = \frac{2}{3}$.

Dalej $\sqrt{3}(B-C) = -3(B+C) = 1$ czyli $B-C = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Otrzymujemy

$2B = B+C+(B-C) = -\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3}$, zatem $B = \frac{\sqrt{3}-1}{6}$ i wobec tego $C = -\frac{\sqrt{3}+1}{6}$.

Sprowadziliśmy rzecz do obliczenia całek

$$\int_0^1 \frac{2}{3(1+2z-z^2)}\mathrm{d}z = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1+z}+\frac{1}{\sqrt{2}+1-z}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right) = \\ = \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(\sqrt{2}+1),$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3}-1}{6}\frac{1}{z^2+(1-\sqrt{3})z+2-\sqrt{3}}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{3}-1}{6}\int_0^1 \frac{1}{\left(z+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{3}-1}{3(2-\sqrt{3})}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2z}{\sqrt{3}-1}-1\right)^2+1}\mathrm{d}z = \\ = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{6(2-\sqrt{3})}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z}{\sqrt{3}-1}-1\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \operatorname{arctg}(-1)\right) = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg}1\right) = \\ = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{36},$$

$$-\int_0^1 \frac{\sqrt{3}+1}{6}\frac{1}{z^2+(1+\sqrt{3})z+2+\sqrt{3}}\mathrm{d}z = \frac{-\sqrt{3}-1}{6}\int_0^1 \frac{1}{\left(z+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}z = \frac{-\sqrt{3}-1}{3(2+\sqrt{3})}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2z}{\sqrt{3}+1}+1\right)^2+1}\mathrm{d}z = \\ = \frac{-(\sqrt{3}+1)^2}{6(2+\sqrt{3})}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z}{\sqrt{3}+1}+1\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \operatorname{arctg}1\right) = -\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1\right) = \\ -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{36}.$$

Ostatecznie pole równe jest $\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(\sqrt{2}+1)+\frac{\pi}{6}$