Rozwiązania niektórych zadań ostatnio omawianych tu i ówdzie

1. Niech $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k: \quad x_i > 0 \text{ dla } i = 1,\ldots,k\}$ i niech X będzie zbiorem wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, całkowalnych względem miary ℓ_k i takich, że $f(\mathbf{x}) = 0$, gdy $\mathbf{x} \notin \mathbb{R}^k_+$. Określamy operację, która każdej funkcji $f \in X$ przyporządkowuje funkcję $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, daną wzorem

$$\widetilde{f}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathrm{e}^{-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} f(\mathbf{x})\, d\ell_k(\mathbf{x}) \quad \text{dla} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k_+ \quad \text{oraz} \quad \widetilde{f}(\mathbf{y}) = 0 \text{ dla } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \setminus \mathbb{R}^k_+.$$

Uzasadnić, że $\widetilde{f} \in X$.
Dowieść, że jeżeli $f, g \in X$ oraz $h = f * g$, to także $h \in X$ i zachodzi równość

$$\widetilde{h}(\mathbf{y}) = \widetilde{f}(\mathbf{y})\widetilde{g}(\mathbf{y}) \quad \text{dla} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k_+\,.$$

Rozwiązanie. Niestety nie cała teza jest prawdziwa. Niech $k = 1$ i $f(x) = e^{-x}$ dla $x > 0$. Ta funkcja jest oczywiście całkowalna. Mamy $\widetilde{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-xy} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{y+1}$. Funkcja $\widetilde{f}$ nie jest więc całkowalna wbrew temu, że ma być $\widetilde{f} \in X$. Jest jednak dobrze określona, bo $|\mathrm{e}^{-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} f(\mathbf{x})| \leqslant |f(\mathbf{x})|$, a f jest całkowalna. Ta sama nierówność pozwala na wywnioskowanie ciągłości $\widetilde{f}$ na $(0,\infty)$ z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, majorantą jest $|f|$.
Splot $f*g$ jest dobrze określony, bo funkcje f, g są całkowalne na $\mathbb{R}^k$. Jest tez funkcją całkowalną. Możemy więc napisać
$\widetilde{f*g}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} f*g(\mathbf{x}) d\ell_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} \int_{R^k} f(\mathbf{x}-\mathbf{u}) g(\mathbf{u}) d\ell_k(\mathbf{u}) d\ell_k(\mathbf{x}) =$
$= \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{-\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}-\mathbf{u}) g(\mathbf{u}) d\ell_{2k}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{-\mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{u})} f(\mathbf{x}-\mathbf{u}) e^{-\mathbf{y}\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) d\ell_{2k}(\mathbf{x},\mathbf{u}) =$
$= \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{u})} f(\mathbf{x}-\mathbf{u}) d\ell_k(\mathbf{x}) \Big) e^{-\mathbf{y}\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) d\ell_k(\mathbf{u}) =$
$= \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{y}\cdot(\mathbf{v})} f(\mathbf{v}) d\ell_k(\mathbf{v}) \Big) e^{-\mathbf{y}\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) d\ell_k(\mathbf{u}) =$
$= \Big(\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{y}\mathbf{u}} g(\mathbf{u}) d\ell_k(\mathbf{u}) \Big) \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\mathbf{y}\cdot(\mathbf{v})} f(\mathbf{v}) d\ell_k(\mathbf{v}) \Big) = \widetilde{g}(\mathbf{y}) \cdot \widetilde{f}(\mathbf{y})$. Zakończyliśmy dowód. $\square$

2. Znaleźć strumień przepływu pola wektorowego $F(x,y,z) = (xze^{xy}, -yze^{xy}, z)$ przez powierzchnię, $\{(x,y,z)\colon \quad 5x^2+2y^2+6z^2+2xy-2yz-2zx = 89, z \geqslant 0\}$ zorientowaną „na zewnątrz" (zewnętrznym wektorem normalnym w punkcie $(-1,-4,2)$ jest $\frac{1}{531}(-11,-11,17)$).

Rozwiązanie. $5x^2+2y^2+6z^2+2xy-2yz-2zx = 5(x+\frac{y}{5}-\frac{z}{5})^2 + \frac{9}{5}(y-\frac{4z}{9})^2 + \frac{49}{9}z^2$, więc to wyrażenie jest wszędzie dodatnie z wyjątkiem punktu $(0,0,0)$. Stąd i ze znanych twierdzeń o formach kwadratowych wynika, że równanie $5x^2+2y^2+6z^2+2xy-2yz-2zx = 89$ opisuje elipsoidę E, której środkiem symetrii jest punkt $(0,0,0)$ – funkcja $5x^2+2y^2+6z^2+2xy-2yz-2zx$ przyjmuje te same wartości w punktach (x,y,z) oraz $(-x,-y,-z)$. Mamy też $d(xze^{xy}dy\wedge dz - yze^{xy}dz\wedge dx + zdx\wedge dy) = (ze^{xy}+xyze^{xy}-ze^{xy}-xyze^{xy}+1)dx\wedge dy\wedge dz =$ $= dx\wedge dy\wedge dz$. Niech $\mathfrak{n}(x,y,z)$ oznacza zewnętrzny wektor normalny w punkcie (x,y,z) elipsoidy E. Strumień pola przez E to całka $\int_E F(x,y,z)\cdot \mathfrak{n} d\sigma_E =$ $= \int_E xze^{xy}dy\wedge dz - yze^{xy}dz\wedge dx + zdx\wedge dy = \int_{INT(E)} dx\wedge dy\wedge dz$, gdzie przez $INT(E)$ oznaczyliśmy ograniczoną składową spójną zbioru $\mathbb{R}^3\setminus E$. Oznacza to„ że ten strumień tego pola równy jest objętości (trójwymiarowej miere Lebesgue'a) zbioru $INT(E)$. Można ją obliczać różnymi sposobami, ale skorzystamy z tego, co już wiemy. Niech $u = \sqrt{5}(x+\frac{y}{5}-\frac{z}{5})$, $v = \frac{3}{\sqrt{5}}(y-\frac{4z}{9})$ oraz $w = \frac{7}{3}z$. We współrzędnych (afinicznych) u,v,w zbiór $INT(E)$ opisany jest nierównością $u^2+v^2+w^2 \leqslant 89$. Moduł jakobianu przekształcenia przejścia od (x,y,z) do (u,v,w) równy jest $\sqrt{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{7}{3} = 7$, więc przekształcenia odwrotnego to $\frac{1}{7}$. Objętość jest zatem równa $\frac{1}{7}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\sqrt{89}^3$

Uwaga. Niech $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. Wartościami własnymi macierzy M są liczby 7, $3-\sqrt{2}$ i $3+\sqrt{2}$. Wobec tego jeśli zapiszemy formę kwadratową używając współrzędnych u,v,w związanych z bazą złożoną z jednostkowych wektorów własnych macierzy M, to równanie E przyjmie postać $7u^2+(3-\sqrt{2})v^2+(3+\sqrt{2})w^2 = 89$. Stąd wynika, że objętość $INT(M)$ równa jest objętości kuli jednostkowej pomnożonej przez $\frac{\sqrt{89}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{89}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{89}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{89\sqrt{89}}{7}$. $\square$

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mamy punkty $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$, $D = (1,1,0)$, $E = (1,1,1)$. Rozważamy powierzchnię wielościenną utworzoną przez trójkąty ADE, DBE, BCE i CAE (rozmaitość z kantami). Dane jest pole wektorowe $F = \left[xz, -yz, \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$. Obliczyć przepływ pola $\mathrm{rot}(F)$ przez tę powierzchnię ze strony ujemnej „widoczne" z punktu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ na dodatnią.

Rozwiązanie. Niech $M = \triangle ADE \cup \triangle DBE \cup \triangle BCE \cup \triangle CAE \cup \triangle ABC \cup \triangle ABD$, dodaliśmy $\triangle ABC \cup \triangle ABD$. M jest topologiczną rozmaitością dwuwymiarową, która po usunięciu boków sumowanych trójkątów, więc odcinków AB, BC, CA, CE, AE, AD, DE, BD, BE staje się rozmaitością klasy C^∞. W tej sytuacji można zastosować twierdzenie Stokesa (wzór Ostrogradzkiego – Gaussa) do rozmaitości zwartej W, której brzegiem jest M. Zachodzi równość $d(xzdx - yzdy + \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz) = xdz \wedge dx - ydz \wedge dy + \frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^2} dx \wedge dz + \frac{xz\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{xy^2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^2} dy \wedge dz = \left(x - \frac{yz(y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) dz \wedge dx + \left(y + \frac{xz(x^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) dy \wedge dz$. Przepływ pola $\mathrm{rot}(F) = \left[y + \frac{xz(x^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}, x - \frac{yz(y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}, 0\right]$ przez M to całka z tej formy po M, ale ta całka na mocy twierdzenia Stokesa (wzoru Ostrogradzkiego – Gaussa) jest równa całce z różniczki tej formy po obszarze W, ale $d \circ d = 0$, więc ten przepływ jest zerem. Zachodzi też równość $\int_{\triangle ADB} \left(x - \frac{yz(y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) dz \wedge dx + \left(y + \frac{xz(x^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) dy \wedge dz = 0$, bo na tym trójkącie $z = 0$. Wobec tego wystarczy obliczyć $\int_{\triangle ABC} \left(x - \frac{yz(y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) dz \wedge dx + \left(y + \frac{xz(x^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) dy \wedge dz$. Na mocy twierdzenia Stokesa ta całka jest równa całce $\int_{\partial(ABC)} \left(xzdx - yzdy + \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz\right)$ przy czym trójkąt obiegając brzeg tego trójkąta zgodnie z orientacją indukowaną przechodzimy przez jego wierzchołki w kolejności A, C, B. Przyjmując $\gamma(t) = (0, t, 1-t)$, $\delta(t) = (1-t, 0, t)$ otrzymujemy $\gamma(0) = (0,0,1) = C$, $\gamma(1) = (0,1,0) = B$, $\delta(0) = (1,0,0) = A$, $\delta(1) = (0,0,1) = C$, więc wystarczy scałkować jednoformę wzdłuż γ i δ. Mamy $\int_\gamma \left(xzdx - yzdy + \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz\right) = \int_0^1 (-t(1-t)dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ oraz $\int_\delta \left(xzdx - yzdy + \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz\right) = \int_0^1 t(1-t)d(1-t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$. Wobec tego przepływ pola (strumien pola) przez trójkąt ABC jest równy $-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$. Stąd i zerowania się przepływu przez powierzchnię M wnioskujemy, że strumień pola przez $\triangle ADE \cup \triangle DBE \cup \triangle BCE \cup \triangle CAE$ jest równy $\frac{1}{3}$. Zakończyliśmy rozwiązywanie zadania. Można je też rozwiązać bez używania twierdzenia Stokesa w ogóle – strumień można obliczyć korzystając z jego definicji.

Uwaga o orientacji. Dodajmy jeszcze, że wektorem zewnętrznym normalnym do ściany ABC jest $[-1,-1,-1]$ (o długości $\sqrt{3}$). Uporządkowana baza w przestrzeni stycznej do płaszczyzny stycznej do ściany ABC zgodna z jej orientacją wyznaczoną przez $[-1,-1,-1]$ to np. $\big([-1,1,0],[0,1,-1]\big)$ – dla dowodu wystarczy przekonać się, że $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} > 0$. Wektor $[-1,1,0]$ jest styczny do prostej AB, ale **drugi** wektor $[0,1,-1]$ skierowany jest na zewnątrz trójkąta ABC, więc orientację brzegu wyznacza wektor $[1,-1,0]$.