AM2-2, 2019 zadania 6.

Poprawiłem treść zadania 14, 5 czerwca 2019, 11:39.

Jeśli w zadaniu występuje całka po krzywej Jordana i nie jest wskazana orientacja, to należy przyjąć, że chodzi o przeciwną do ruchu wskazówek normalnego zegara.

1. Niech $G \subseteq \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Funkcja $f\colon G \to \mathbb{C}$ ma *pochodną zespoloną* w punkcie $z_0 \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (skończona) granica $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Utożsamiajmy liczby $z \in \mathbb{C}$ z punktami $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(z = x + iy)$. Niech $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ $(u, v\colon G \longrightarrow \mathbb{R})$.
Dowieść, że jeśli f ma pochodną zespoloną w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, to funkcje u, v są w punkcie (x_0, y_0) różniczkowalne oraz spełniają w tym punkcie obydwie równości $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

2. Niech $\gamma\colon S^1 \longrightarrow G \subseteq \mathbb{C}$ będzie krzywą Jordana kawałkami klasy C^1, gdzie G jest obszarem , zawierającym $\gamma(S^1)$ wraz z ograniczoną składową zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$. Załóżmy, że funkcja $f\colon G \to \mathbb{C}$ ma ciągła pochodną zespoloną w każdym punkcie zbioru G. Obliczyć $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$ (czyli $\int_C (u + i\, v)(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$).
Uwaga. W tym zadaniu założenie ciągłości f' jest zbędne, dodaliśmy, bo inaczej należałoby to stwierdzenie udowodnić, a nie o to w tym zadaniu chodzi.

Te dwa pierwsze zadania już rozwiązaliśmy.

3. Niech $f, g\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ będą dwiema funkcjami klasy C^2 określonym w zbiorze otwartym $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Niech $\gamma\colon S^1 \longrightarrow G \subseteq \mathbb{C}$ będzie krzywą Jordana kawałkami klasy C^1, gdzie G jest obszarem, zawierającym $\gamma(S^1)$ wraz z ograniczoną składową zbioru $D = \mathbb{C} \setminus \gamma(S^1)$. Symbol $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{n}}$ oznacza pochodną w kierunku wektora jednostkowego $\mathfrak{n}$ prostopadłego do brzegu krzywej γ i skierowanego na zewnątrz D. Udowodnić, że $\int_\gamma (f \frac{\partial g}{\partial \mathfrak{n}}) d\ell_\gamma = \int (\text{grad } f \cdot \text{grad } g) d\ell_2 + \int_D (f \triangle g) d\ell_2$ oraz $\int_\gamma (f \frac{\partial g}{\partial \mathfrak{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{n}}) d\ell_\gamma = \int_D (f \triangle g) d\ell_2 - \int_D (g \triangle f) d\ell_2$

Definicja. Jeśli $\triangle u(x, y) = 0$ dla każdego $(x, y) \in D$, to mówimy, że funkcja U jest harmoniczna w zbiorze D. $\square$

4. Udowodnić, że jeśli funkcja u jest harmoniczna w zbiorze otwartym zawierającym krzywą Jordana C kawałkami klasy C^1, to $\int_C \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{n}} d\ell_C = 0$.

5. Niech $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ i niech u będzie funkcją u harmoniczną w kole otwartym K o środku $(0, 0)$. Niech $D \subset K \setminus \{(0, 0)\}$ będzie zbiorem otwartym, którego brzeg $\partial D \subset K \setminus \{(0, 0)\}$ jest sumą skończenie wielu krzywych Jordana. Udowodnić, że to $\int_{\partial D} \left(f \frac{\partial u}{\partial \mathfrak{n}} - u \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{n}} \right) d\ell_{\partial D} = 0$.

6. Niech $B(r)$ będzie kołem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r > 0$ zawartym wewnątrz dziedziny funkcji harmonicznej U, a $C(r)$ niech oznacza okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r. Udowodnić, że wtedy zachodzą równości

$$u(0, 0) = \tfrac{1}{2\pi r} \int_{C(r)} u(x, y) d\ell_{C(r)} = \tfrac{2}{\pi r^2} \int_{B(r)} u(x, y) d\ell_2.$$

7. Udowodnić, że funkcja harmoniczna, która przyjmuje są największą wartość w wewnętrznym punkcie $\mathbf{p}$ swej dziedziny jest stała na składowej spójności zawierającej punkt $\mathbf{p}$.

8. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ w przecięciu z płaszczyzną $x + y + z = 3$ tworzy okrąg. Niech γ będzie krzywą opisującą łuk tego okręgu o początku $(2, 2, -1)$ i końcu (0,3,0), zawarty w półprzestrzeni $\{(x, y, z)\colon \quad y > 0\}$. Obliczyć $\int_\gamma \frac{yzdx - zxdy + xydz}{y^2}$.

9. Niech $\omega = \frac{1}{\sqrt{x+y}}\big((3x+2y)dx + xdy\big)$. Obliczyć całkę $\int_C \omega$ wzdłuż łuku okręgu $C = \{(x,y): \quad x^2+y^2 = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ o początku $(1,0)$ i końcu $(0,1)$.

10. Niech $\omega = \frac{x(x^2+y^2-1)dy - y(x^2+y^2+1)dx}{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}$. Obliczyć całki $\int_{C_1}\omega$, $\int_{C_2}\omega$, $\int_{C_3}\omega$, gdzie $C_1 = \{(x,y): \quad (x+1)^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$, $C_2 = \{(x,y): \quad (x-1)^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$, $C_1 = \{(x,y): \quad x^2+y^2 = 4\}$.

11. Obliczyć całkę formy różniczkowej $\omega = \frac{2xy\,dx - (x^2+y^2)dy}{y^2}$ wzdłuż łuku krzywej określonej równaniem $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{6}\sqrt{x^2+y^2}$, mającego początek $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ i koniec $(1, \sqrt{3})$, położonego w ćwiartce $\{(x,y): \quad x,y > 0\}$.

12. Niech $C = \{(x,y,z): \quad x^2+y^2 = 1 \text{ i } z = xy\}$. Wykazać, że C jest zwartą i spójną rozmaitością jednowymiarową.
Niech $\omega(x,y,z) = ydx + zdy + xdz$ i niech wektor $(0,1,1)$ styczny do C w punkc ie $(1,0,0)$ wyznacza orientację rozmaitości C. Obliczyć $\int_C \omega$.

13. Niech $\omega = ((x+1)dy - ydx)((x+1)^2+y^2) - ((x-1)dy - ydx)((x-1)^2+y^2))$.
Wykaż, że istnieje $f : \mathbb{R}^2 - [-1,1]x0 \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\omega = df$, ale nie istnieje $g : \mathbb{R}^2 - (1,0),(-1,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\omega = dg$.

14. Dla formy $\eta = (2y^3+2x^2y-6y)dx + (-2xy^2+4x^2y+2x)dy$ znajdź krzywą γ w $\mathbb{R}^2$, zamkniętą, spójną, gładką i bez samoprzecięć taką, żeby $\int_\gamma \eta$ była możliwie największa.
Wskazówka: krzywa γ ogranicza pewien obszar.

15. Niech $\omega = \dfrac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2+y^2} - \dfrac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2+y^2}$.

Wykazać, że istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 - [-1,1]\times\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\omega = df$, ale nie ma takiej funkcji $g\colon \mathbb{R}^2 - \{(1,0),(-1,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $\omega = dg$.