AM2-2, 2019 zadania 5.

1. Obliczyć całkę $\int_K (2x+y)\,dx + (x-2y)\,dy$ wzdłuż następującej krzywej $K = \{(x,y)\colon\ x^4+y^3=1;\ \ x \leqslant 0 \leqslant y\}$, zorientowanej tak, że jej początkiem jest punkt $(0,1)$, a końcem punkt $(-1,0)$.

2. Niech $K = \{(x,y)\colon\ 4x^2+y=5,\ \ y \geqslant 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x. Obliczyć całkę $\int_K \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ wzdłuż krzywej K.

3. Zbadać, czy forma $\omega = |x+y|\,dx + |x+y|\,dy$ ma w obszarze $G=\mathbb{R}^2$ własność niezależności całki od drogi (tzn. czy dla każdej pary punktów $\mathbf{x},\mathbf{z}\in G$ i dla każdej krzywej $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow G$, o początku $\mathbf{x}=\gamma(a)$ i końcu $\mathbf{z}=\gamma(b)$, wartość $\int_\gamma \omega$ jest taka sama).

4. Zbadać, czy forma $\omega = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+xy+y^2}$ ma w obszarze $G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ własność niezależności całki od drogi (tzn. czy dla każdej pary punktów $\mathbf{x},\mathbf{z}\in G$ i dla każdej krzywej $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow G$, o początku $\mathbf{x}=\gamma(a)$ i końcu $\mathbf{z}=\gamma(b)$, wartość $\int_\gamma \omega$ jest taka sama).

5. Niech $\omega = f\,dx + g\,dy$ będzie formą klasy C^1 w obszarze $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, zamkniętą ($\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$). Udowodnić, że istnieje liczba $c\in\mathbb{R}$ oraz funkcja (klasy C^2) $u\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ takie, że $\omega = c\cdot\omega_0 + du$, gdzie $\omega_0 = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_C \frac{(\sinh x)\,dy - (\sin y)\,dx}{\cosh x - \cos y}$ po okręgu jednostkowym $C=\{(x,y)\colon\ x^2+y^2=1\}$, zorientowanym dodatnio („przeciwnie niż zegarek").

7. Niech $\gamma(t) = (t^3-3t,\ t^4-2t^2)$ dla $t\in\mathbb{R}$. Zbiór $\gamma(\mathbb{R})$ rozcina płaszczyznę na kilka obszarów, z których jeden jest ograniczony. Obliczyć jego miarę płaską.

8. Niech $\omega = \dfrac{y^2dx - 2xy\,dy}{x^2+y^4}$. Obliczyć całkę z tej formy wzdłuż półokręgu $\{(x,y)\colon\ x^2+y^2=1,\ \ y\geqslant 0\}$ o początku $(1,0)$ i końcu $(-1,0)$.

9. Niech $G\subseteq\mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Funkcja $f\colon\ G\to\mathbb{C}$ ma *pochodną zespoloną* w punkcie $z_0\in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (skończona) granica $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =:\ f'(z_0)\in\mathbb{C}$. Utożsamiajmy liczby $z\in\mathbb{C}$ z punktami $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $(z=x+iy)$. Niech $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ $(u,v\colon\ G\longrightarrow\mathbb{R})$.

Dowieść, że jeśli f ma pochodną zespoloną w punkcie $z_0=x_0+iy_0\in G$, to funkcje u, v są w punkcie (x_0,y_0) różniczkowalne oraz spełniają w tym punkcie obydwie równości $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

10. Niech $\gamma\colon S^1 \longrightarrow G\subseteq\mathbb{C}$ będzie krzywą Jordana kawałkami klasy C^1, gdzie G jest obszarem , zawierającym $\gamma(S^1)$ wraz z ograniczoną składową zbioru $\mathbb{C}\setminus\gamma(S^1)$. Załóżmy, że funkcja $f\colon\ G\to\mathbb{C}$ ma ciągła pochodną zespoloną w każdym punkcie zbioru G. Obliczyć $\displaystyle\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$ (czyli $\int_C (u+i\,v)(\,\mathrm{d}x + i\ \mathrm{d}y)$.

Uwaga. W tym zadaniu założenie ciągłości f' jest zbędne, dodaliśmy, bo inaczej należałoby to stwierdzenie udowodnić, a nie o to w tym zadaniu chodzi.

11. Korzystając z twierdzenia z poprzedniego zadania, obliczyć całki niewłaściwe $\int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$. [Można rozważyć funkcję $f(z)=e^{iz^2}$; i krzywą Jordana złożoną z odcinka osi rzeczywistej, łuku okręgu oraz odcinka prostej $x=y$.]

12. Niech C oznacza brzeg obszaru $D=\{(x,y)\colon\quad 0<y<x\ln\frac{1}{x}\}$. Obliczyć $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$.