

AM2-2, 2019 zadania 4.

1. Obliczyć splot pary funkcji f, g , jeśli $f(x) = e^{-ax^2}$ $g(x) = e^{-bx^2}$, $a, b > 0$.
2. Obliczyć splot pary funkcji f, g , jeśli $f(x) = e^{-x^2}$ i $g(x) = e^x$. g nie jest całkowalna, ale może to nie za bardzo szkodzi.
3. Obliczyć splot pary funkcji f, g , jeśli $f(x) = e^{-ax}$ dla $x > 0$ i $f(x) = 0$ dla $x < 0$ oraz $g(x) = 1$ dla $|x| < a$ i $g(x) = 0$ dla $|x| \geq 0$, $a > 0$. Oznacza to, że $g = \chi_{(-a,a)}$.
4. Obliczyć splot pary funkcji f, g , jeśli $f(x) = \chi_{(a,b)}$, $a < b$ oraz $g(x) = \chi_{(c,d)}$, $c < d$.
5. Wykazać, że splot funkcji f całkowalnej z kwadratem ($\int |f|^2 d\ell_1 < \infty$) i funkcji całkowalnej g jest dobrze określony i jest funkcją całkowalną z kwadratem.
6. Niech $f \in L^1(\mathbb{R})$ i niech $C(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(tx) dt$. Dowieść, że $C(f)$ jest funkcją ciągłą oraz że $\lim_{|x| \rightarrow \infty} C(f)(x) = 0$. Czy $f \in C^1$?