

### AM2-2, 2019 zadania 3.

1. Znaleźć środek ciężkości łuku wyznaczonego na okręgu o promieniu  $R > 0$  przez kąt środkowy równy  $2\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi$ .

2. Niech  $T$  oznacza pełny torus powstały w wyniku obrotu koła o promieniu  $r \in (0, R)$  o środku  $(R, 0, 0)$  wokół osi  $OZ$  (czyli prostej o zdefiniowanej równaniami  $x = 0 = y$ ). Znaleźć środek ciężkości połowy torusa  $T$  złożonej z tych punktów  $(x, y, z)$ , dla których  $z \geq 0$ .

3. Niech  $T$  oznacza pełny torus powstały w wyniku obrotu koła o promieniu  $r \in (0, R)$  o środku  $(R, 0, 0)$  wokół osi  $OZ$  (czyli prostej o zdefiniowanej równaniami  $x = 0 = y$ ). Znaleźć środek ciężkości połowy torusa  $T$  złożonej z tych punktów  $(x, y, z)$ , dla których  $y \geq 0$ .

4. Jeśli  $\rho(\mathbf{x})$  jest gęstością masy w punkcie  $\mathbf{x}$ , tzn. nieujemną funkcją mierzalną, to moment bezwładności ciała  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  (zbioru mierzalnego) względem prostej  $L$  równy jest  $\int_K \rho(\mathbf{x})r(\mathbf{x})^2 d\ell_3(\mathbf{x})$ , gdzie  $r(\mathbf{x})$  oznacza odległość punktu  $\mathbf{x}$  od prostej  $L$ . Analogicznie definiujemy moment bezwładności ciała  $M$  będącego rozmaitością dwu- lub jednowymiarową, zastępując miarę Lebesgue'a miarą Lebesgue'a–Riemanna na rozmaitości  $M$ . Obliczyć moment bezwładności kuli względem prostej  $L$  znajdującej się w odległości  $R$  od środka kuli.

5. Niech  $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, |z| \leq h\}$ . Znaleźć moment bezwładności jednorodnego walca  $W$  względem prostej  $x = y = z$ .

6. Znaleźć masę miseczki parabolicznej  $2z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , której gęstość masy równa jest  $\rho(x, y, z) = z$ .

7. Znaleźć moment bezwładności jednorodnej sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  względem osi  $z$ .

8. Niech  $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$  będzie jednorodną kulą materialną (tzn. masa fragmentu kuli  $\overline{B}(\mathbf{p}, r)$  równa jest jego mierze Lebesgue'a). Wykazać, że kula przyciąga punkt materialny  $\mathbf{q}$  tak, jak przyciąga  $\mathbf{q}$  punkt materialny położony w odległości  $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$  od  $\mathbf{q}$ , w którym skupiona jest masa równa masie kuli.

9. Czy stwierdzenie z poprzedniego zadania pozostanie prawdziwe, jeśli zastąpimy kulę jednorodną sferą?

10. Wykazać, że jeśli punkt materialny znajduje się wewnątrz jednorodnej sfery materialnej, to sfera nie oddziałuje na niego grawitacyjnie.