AM2-2, 2019 zadania 2.

Poprawiłem tekst zad. 17 po uwadze p. D. Klemby, 12.03.19

1. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{(\sin x+\cos x)^n}{1+(\sin x+\cos x)^{2n}} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

2. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją klasy C^1 i niech $Df(x)$ będzie monomorfizmem dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że $l_2\big(f(\mathbb{R})\big) = 0$.

3. Podać przykład ciągu (f_n) mierzalnych funkcji nieujemnych, dla których nierówność w lemacie Fatou jest ostra.

4. Obliczyć $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 \ln(1+\frac{x}{n})}$.

5. Obliczyć $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{dx}{n + n^2 \sin\frac{x}{n^2}}$.

6. Niech $f \in L^1$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ i niech $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}-\mathbf{v})$. Dowieść, że funkcja $\mathbb{R}^k \ni \mathbf{v} \longmapsto f_{\mathbf{v}} \in L^1(\mathbb{R}^k)$ jest jednostajnie ciągła.

7. Niech $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary ℓ_1. Definiujemy transformatę Laplace'a $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}t$. Dowieść, że funkcja $\mathcal{L}(f)\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞. *Można zacząć od wykazania ciągłości.*

8. Niech $f\colon [0,\infty)$ będzie ograniczoną funkcją ciągłą. Wykazać, że $\lim\limits_{y\to 0} \displaystyle\int_0^\infty \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0)$.

9. Obliczyć $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

10. Obliczyć $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^n x^k \big(1-\frac{x}{n}\big)^n\,\mathrm{d}x$.

11. Obliczyć $\frac{d}{da}\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ i $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \ln\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$.

12. Obliczyć (może można zróżniczkować względem parametru a)

a. $\int_0^1 \frac{t^a-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$;

b. $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$;

d. $\int_0^1 x^{a-1}\big(\ln x\big)^n\,\mathrm{d}x$, $a > 1$.

13. Niech T oznacza czworościan foremny, którego wierzchołkami są $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,\sqrt{2})$, $(0,-1,\sqrt{2})$. Niech B będzie bryłą powstałą w wyniku obrotu czworościanu T wokół osi OZ, tzn. $B = \{R_\alpha(p)\colon\ \ p \in T,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, gdzie R_α oznacza obrót wokół osi z o kąt α. Obliczyć objętość (trójwymiarową miarę Lebesgue'a) bryły B.

14. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oznacza funkcję całkowalną w sensie Lebesgue'a ($f \in L(\mathbb{R})$). Zdefiniujmy: $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Wykazać, że:
(a) g jest dobrze określona na $\mathbb{R}$,
(b) g jest ciągła na $\mathbb{R}$,
(c) g ma ciągłą pochodną na $\mathbb{R}$.
(d) Czy g jest funkcją klasy C^2 na całej prostej?

15. Dana jest przestrzeń z miarą $\langle X, \mathfrak{M}, \mu\rangle$, $\mu(X) < \infty$ oraz ustalona funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$, mierzalna względem $\mathfrak{M}$. Niech $J = \{p \in [1,\infty)\colon \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$. Dla każdej liczby $p \in J$ określamy p-normę wzorem $\|f\|_p \colon = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.
Udowodnić, że zbiór J jest przedziałem i że $p \mapsto \|f\|_p$ jest ciągłą funkcją zmiennej $p \in J$.

16. Dane liczby $a > b > 0$. Obliczyć $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$.

17. Dana jest przestrzeń z miarą $\langle X, \mathfrak{M}, \mu\rangle$, $\mu(X) = 1$, oraz zbiory $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$, $\mu(A_i) \geqslant 1/2$; n – liczba nieparzysta. Dowieść, że dla pewnych dwóch różnych numerów i, j zachodzi nierówność $\mu(A_i \cap A_j) \geqslant \dfrac{n-1}{4n}$.

18. Obliczyć całki (jeśli istnieją):
$\iint_A xe^{-y^2} dx\, dy$, gdzie $A = \{y > 0,\ |x+y| \leqslant 1\}$;
$\iiint_A \frac{x\, dx\, dy\, dz}{1+(xyz)^4}$, gdzie $A = \{(x,y,z)\colon\ x > 0,\ y > 1,\ z > 1\}$;
$\iiint_A \frac{dx\, dy\, dz}{1+(x+y+1)^2}$, gdzie $A = \{(x,y,z)\colon\ x,\ x+y,\ z(x+y+1) \in (0,1)\}$.

19. Obliczyć objętość (miarę trójwymiarową) bryły

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ 4x^2 + y^2 < 4,\ \ x > 0,\ \ x^2 > z > 0\}.$$

20. Dana funkcja $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $[a,b]$. Zakładamy, że funkcja φ' jest całkowalna względem miary ℓ_1 na $[a,b]$. Udowodnić, że zachodzi równość $\int_a^b \varphi'\, d\ell_1 = \varphi(b) - \varphi(a)$.

21. Obliczyć objętość bryły B ograniczonej powierzchniami: $2xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $x = 2y$, $z = 0$, $yz = 1$; $x, y > 0$.
Wyjaśnienie: w zbiorze $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x > 0,\ y > 0\}$ te równania opisują pewne powierzchnie, które dzielą ów zbiór na kilka obszarów; jeden z nich jest ograniczony, i to jest bryła B.

22. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ na zbiorze

$$\{(x,y,z)\colon\ x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z\}.$$

23. Niech $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \max(-2x, x-1) < y < \min(1-2x, x+1)\}$. Obliczyć (z dokładnym uzasadnieniem) granicę $\lim_{n\to\infty} \iint_H \left(\frac{2x+y+n}{n}\right)^n dx\, dy$.

24. Dany jest kąt dwuścienny o rozwartości 2γ $(0 < \gamma < \pi/2)$, którego krawędź przechodzi przez środek kuli o promieniu a. Niech C będzie częścią kuli zawartą w tym kącie dwuściennym. Obliczyć odległość środka ciężkości bryły C od krawędzi kąta.

25. Niech $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem liniowym nieosobliwym i niech E będzie zbiorem mierzalnym, ograniczonym w R^k. Wykazać, że obrazem (w odwzorowaniu L) środka ciężkości zbioru E jest środek ciężkości zbioru $L(E)$ (obrazu zbioru E).

26. Udowodnić, że każda funkcja wypukła $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna prawie wszędzie (w sensie miary ℓ_k).

27. Niech $A = \{(x,y,z)\colon\ x^2 + y^2 + z^2 < x^{1/3}\}$, $p \in \mathbb{R}$. Obliczyć całkę

$$\iiint_A x^p\, dx\, dy\, dz.$$

28. Niech $A = \{(x,y,z)\colon\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \sqrt[3]{z}\}$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_A \frac{e^{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz}{n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}.$$

29. Niech $A = \{(t,x,y,z)\colon \quad t^2+2x^2+3y^2+4z^2<1\}$. Obliczyć całkę

$$\iiiint_A \frac{t^2\,dt\,dx\,dy\,dz}{t^2+2x^2+3y^2+4z^2}\,.$$

30. Niech $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary ℓ_1. Niech $\varphi(y)=\int_y^{y+1} f(x)\,dx$. Udowodnić, że również funkcja φ jest całkowalna oraz że zachodzi równość $\int_R \varphi d\ell_1 = \int_{\mathbb{R}} f d\ell_1$.

31. Dany jest zbiór mierzalny, ograniczony $W\subset\mathbb{R}^3$. Niech A, B, C będą rzutami W na płaszczyzny Oyz, Oxz, Oxy. Dowieść, że $\ell_3(W)\leqslant\sqrt{\ell_2(A)\ell_2(B)\ell_3(C)}$.

32. Obliczyć miarę zbioru

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ x,y,z>0,\ xy<z,\ x^4+z^4<x^2z\}.$$

33. Niech $H=\{(x_1,\ldots,x_k):\ x_k=0\}\subset\mathbb{R}^k$ będzie podprzestrzenią „równikową” (izomorficzną/ izometryczną z $\mathbb{R}^{k-1}$). Niech C będzie stożkiem, którego podstawą jest zbiór $B\subset H$, ograniczony, mierzalny (ℓ_{k-1}), a wierzchołek leży w odległości h od H. W jakiej odległości od H leży środek ciężkości zbioru C?

34. Niech $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|^{-p}\big(1-\|\mathbf{x}\|\big)^{-q}$ dla $\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^k$. Dla jakich par liczb $p,q>0$ zachodzi nierówność $\int_{B(\mathbf{0},1)} f(\mathbf{x})d\ell_k<\infty$?

35. Niech $A\subset\mathbb{R}^3$ będzie zbiorem mierzalnym, ograniczonym, znajdującym się w półprzestrzeni $\{(x,y,z)\colon\quad z>0\}$; niech $m=\ell_3(A)$; punkt (a,b,c) jest środkiem ciężkości zbioru A. Dane są liczby α, β $(0<\alpha<\beta)$. Dla $t>0$ niech $f(t)$ oznacza miarę (ℓ_3) części zbioru A zawartej pomiędzy płaszczyznami o równaniach $z=\alpha t$ i $z=\beta t$. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ (wyrazić ją przez wielkości dane).

36. Funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, klasy C^2, spełnia warunek $f''(x)>1/(1+x^2)$. Udowodnić, że f nie ma asymptoty.

37. Niech f będzie ustaloną funkcją z $L^1(\mathbb{R}^k)$. Niech $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}-\mathbf{z})$ dla $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^k$. Udowodnić, że odwzorowanie $\mathbb{R}^k\to L^1(\mathbb{R}^k)$, które punktowi $\mathbf{z}$ przyporządkowuje funkcję $f_{\mathbf{z}}$, jest jednostajnie ciągłe.
Wskazówka. Niech $\varepsilon>0$. Wiadomo, że istnieje $\varphi\colon\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ ciągła, $\varphi(\mathbf{x})=0$ poza pewnym zbiorem zwartym K, $\|f-\varphi\|_1<\varepsilon$. Niech $\widetilde{K}\supset\operatorname{int}(\widetilde{K})\supset K$ będzie zbiorem zwartym. Dobieramy $\delta\in\big(0,\operatorname{dist}\big(K,\mathbb{R}^k\setminus\widetilde{K}\big)\big)$ tak, by $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\leqslant\delta\Rightarrow|\varphi(\mathbf{u})-\varphi(\mathbf{v})|\leqslant\varepsilon$. Rozpoczynamy szacowania: $\|f_{\mathbf{u}}-f_{\mathbf{v}}\|_1\leqslant\cdots$

38. Znaleźć środek ciężkości półkuli trój– i k–wymiarowej.

39. Niech $\overline{B}(\mathbf{p},r)$ będzie jednorodną kulą materialną (tzn. masa fragmentu kuli $\overline{B}(\mathbf{p},r)$ równa jest jego mierze Lebesgue'a). Wykazać, że kula przyciąga punkt materialny $\mathbf{q}$ tak, jak przyciąga $\mathbf{q}$ punkt materialny położony w odległości $\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|$ od $\mathbf{q}$, w którym skupiona jest masa równa masie kuli.

40. Znaleźć moment bezwładności jednorodnego walca $x^2+y^2\leqslant a^2$, $|z|\leqslant h$ względem prostej $x=y=z$.

41. Znaleźć masę miseczki parabolicznej $2z=x^2+y^2$, $0\leqslant z\leqslant 1$, której gęstość masy równa jest $\varrho(x,y,z)=z$.

42. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$.

43. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^4+y^4=x^2+y^2$.

44. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^2+y^2)^2 = 2xy$.

45. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2 \geqslant r^2 > 0$.

46. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^3+y^3 = 3xy$.

47. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywą $x^3+y^3 = x^2+y^2$ i osiami układu współrzędnych.

48. Znaleźć objętość obszaru, ograniczonego powierzchniami
$$x^2+y^2+z^2 = 16 \text{ i } 4x = x^2+y^2.$$

49. Znaleźć objętość obszaru ograniczonego dwiema powierzchniami
$$x^2+y^2+z^2 = 36 \text{ i } 9 = x^2+y^2.$$

50. Znaleźć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $x^2-1 = z$ oraz $1 = x^2+y^2$.

51. Znaleźć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $y^2+z^2 = 9$, $4 = z^2+y^2$, $x = 1$, $x = 2$.

52. Znaleźć objętość części wspólnej D dwóch nieskończonych walców o tym samym promieniu $r > 0$, których osie symetrii przecinają się po kątem prostym. Następnie znaleźć całkę $\int_D x d\ell_3$.

53. Znaleźć moment bezwładności torusa względem jego osi obrotu.