

AM2-2, 2019 zadania 1.

1. Obliczyć objętość torusa powstałego w wyniku obrotu o 2π koła o promieniu $r > 0$ o środku leżącym w odległości $R > r$ od osi obrotu leżącej w płaszczyźnie koła.
2. Czy całka $\int_{|x|+|y|<1} \ln(x^2 + y^2) dx dy$ jest dodatnia, czy ujemna?
3. Czy całka $\int_{|x|^2+|y|^2<4} \sqrt[3]{1 - (x^2 + y^2)} dx dy$ jest dodatnia, czy ujemna?
4. Czy całka $\int_A \arcsin(x + y) dx dy$, gdzie $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y < 1 - x\}$ jest dodatnia, czy ujemna?
5. Obliczyć całkę $\int_A xy^2 dx dy$, gdzie $p > 0$ a A to zbiór ograniczony parabolą $y^2 = 2px$ i prostą $x = \frac{p}{2}$.
6. Obliczyć całkę $\int_A \frac{1}{\sqrt{2a-x}} dx dy$, gdzie $a > 0$ a A to zbiór ograniczony krótszym łukiem okręgu $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ i osiami układu współrzędnych.
7. Obliczyć całkę $\int_A |xy| dx dy$, gdzie $a > 0$ i $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.
8. Obliczyć całkę $\int_A (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie $a > 0$ i A jest równoległobokiem, którego boki są zawarte w prostych $x = y$, $y = x + a$, $y = a$ i $y = 3a$.
9. Obliczyć całkę $\int_A y^2 dx dy$, gdzie $a > 0$ a A to zbiór ograniczony poziomą osią układu współrzędnych i pierwszym łukiem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(q - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
10. Obliczyć całkę $\int_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.
11. Obliczyć całkę $\int_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.
12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $(x - y)^2 + x^2 = 4$.
13. Obliczyć pole obszaru $\{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 \geq 1\}$.
14. Obliczyć pole obszaru $\{(x, y) : (x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
15. Obliczyć pole obszaru $\{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3xy^2\}$.
16. Obliczyć pole obszaru $\{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = 8xy, (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.
17. Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostymi $x + y = a$, $x + y = b$, $y = cx$, $y = dx$, gdzie $0 < a < b$, $0 < c < d$.
18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x$, $y = 2x$, gdzie $0 < x$, $0 < y$.
19. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2rx$, $x^2 = 2sx$, gdzie $0 < p < q$ i $0 < r < s$.