Prawie elementarne sumowanie szeregu o wyrazie $\frac{1}{n^2}$

It can be of no practical use to know that π is irrational, but if we can know, it surely would be intolerable not to know. – Edward Titchmarsh (1 VI 1899 - 18 I 1963).

There are certainly people who regard $\sqrt{2}$ as something perfectly obvious but jib at $\sqrt{-1}$. This is because they think they can visualise the former as something in physical space but not the latter. Actually $\sqrt{-1}$ is a much simpler concept. – Edward Titchmarsh (1 VI 1899 - 18 I 1963).

Unfortunately what is little recognized is that the most worthwhile scientific books are those in which the author clearly indicates what he does not know; for an author most hurts his readers by concealing difficulties. – Évariste Galois (25 X 1811 – 31 V 1832).

Since the beginning of the century, computational procedures have become so complicated that any progress by those means has become impossible, without the elegance which modern mathematicians have brought to bear on their research, and by means of which the spirit comprehends quickly and in one step a great many computations. It is clear that elegance, so vaunted and so aptly named, can have no other purpose. ... Go to the roots, of these calculations! Group the operations. Classify them according to their complexities rather than their appearances! This, I believe, is the mission of future mathematicians. This is the road on which I am embarking in this work. – Évariste Galois (25 X 1811 – 31 V 1832).

Skorzystamy z nierówności podwójnej $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, która zachodzi dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Najpierw przygotowania. Rozpoczniemy od dwóch wzorów

$$\cos(mx) = \binom{m}{0}\cos^m x - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\sin^2 x + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\sin^4 x - \binom{m}{6}\cos^{m-6}\sin^6 x + \ldots$$

$$\sin(mx) = \binom{m}{1}\cos^{m-1} x\sin x - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\sin^3 x + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\sin^5 x - \binom{m}{7}\cos^{m-7}\sin^7 x + \ldots$$

Oba można udowodnić za pomocą indukcji, ale można też skorzystać z tego, że $i^2 = -1$ oraz z wzoru de Moivre'a: $(\cos x + i\sin x)^m = \cos(mx) + i\sin(mx)$, wystarczy zastosować do lewej strony tej równości dwumian Newtona, następnie porównać części rzeczywiste i urojone prawej i lewej strony otrzymanej tożsamości. Korzystać będziemy jedynie z drugiego.

W drugiej równości podstawiamy kolejno w miejsce x liczby $\frac{\pi}{2n+1}, \frac{2\pi}{2n+1}, \frac{3\pi}{2n+1}, \ldots, \frac{n\pi}{2n+1}$, przyjmujemy $m = 2n+1$, korzystamy z tego, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ zachodzą wzory $\sin\frac{k\pi}{2n+1} \neq 0$, $\sin(k\pi) = 0$. Otrzymujemy

$$0 = \frac{\sin\frac{k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}} = \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}\frac{k\pi}{2n+1} - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}\frac{k\pi}{2n+1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1} + \binom{2n+1}{5}\cos^{2n-4}\frac{k\pi}{2n+1}\sin^4\frac{k\pi}{2n+1} -$$
$$- \binom{2n+1}{7}\cos^{2n-6}\frac{k\pi}{2n+1}\sin^6\frac{k\pi}{2n+1} + \ldots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}\sin^{2n}\frac{k\pi}{2n+1} =$$
$$= \binom{2n+1}{1}\left(1-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^n - \binom{2n+1}{3}\left(1-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1} + \binom{2n+1}{5}\left(1-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{n-2}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 -$$
$$- \binom{2n+1}{7}\left(1-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^{n-3}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)^n.$$

Oznacza to, że każda z liczb $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}, \sin^2\frac{2\pi}{2n+1}, \ldots, \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$\binom{2n+1}{1}(1-x)^n - \binom{2n+1}{3}(1-x)^{n-1}x + \binom{2n+1}{5}(1-x)^{n-2}x^2 - \binom{2n+1}{7}(1-x)^{n-3}x^3 + \ldots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}x^n.$$

Podstawiając $x = \frac{1}{y}$ i mnożąc wynik przez y^n otrzymujemy

$$\binom{2n+1}{1}(y-1)^n - \binom{2n+1}{3}(y-1)^{n-1} + \binom{2n+1}{5}(y-1)^{n-2} - \binom{2n+1}{7}(y-1)^{n-3} + \ldots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}.$$

Wynika stąd, że każda z liczb $\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}, \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}, \ldots, \frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}$ jest pierwiastkiem wielomianu n–tego stopnia zmiennej y. Wskazaliśmy n różnych pierwiastków tego wielomianu, czyli wszystkie. Sumę pierwiastków znajdziemy korzystając z wzoru Viètè'a. Współczynnik przy y^n w tym wielomianie to $\binom{2n+1}{1} = 2n+1$. Współczynnik przy y^{n-1} to $-\binom{2n+1}{1}\binom{n}{1} - \binom{2n+1}{3} = -n(2n+1) - \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$.

Stąd wynika, że

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6(2n+1)}+\frac{n(2n+1)}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}+n.$$

Stąd i z nierówności $0<\sin x<x$ dla $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ otrzymujemy

$$\frac{n(2n-1)}{3}+n=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}>\frac{1}{(\frac{\pi}{2n+1})^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right).$$

Mamy też $\frac{1}{\sin^2 t}=\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\sin^2 t}=\operatorname{ctg}^2 t+1$ oraz $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}<\frac{1}{x}$, dla $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, zatem

$$\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}-1+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}-1+\ldots+\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}-1=\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}<$$
$$<\frac{1}{(\frac{\pi}{2n+1})^2}+\frac{1}{(\frac{2\pi}{2n+1})^2}+\ldots+\frac{1}{(\frac{n\pi}{2n+1})^2}=\frac{1}{(\frac{\pi}{2n+1})^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$$

i końcu oczom naszym ukazuje się nierówność:

$$\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2\cdot\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2\cdot\left(\frac{n(2n-1)}{3}+n\right).$$

Korzystając z oczywistych równości $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2\cdot\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{\pi^2}{6}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2\cdot\left(\frac{n(2n-1)}{3}+n\right)$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach stwierdzamy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$

Jest to najprostszy dowód jaki znam. Nie piszę najkrótszy, lecz najprostszy: stosowaliśmy tu środki dowodowe dostępne już w pierwszym semestrze I roku dowolnych studiów, na których nauczana jest matematyka. Dowód można poważnie skrócić używając bardziej zaawansowanych narzędzi matematycznych. Idea dowodu pochodzi od Eulera, ale została istotnie uproszczona przez A. Cauchy'ego, który pozbył się szeregów zastępując je wielomianami.

Zaprezentowane rozumowanie pochodzi ze znakomitej książki „Biblioteka kółka matematycznego, Arytmetyka i algebra" autorstwa D.O.Szklarskiego, N.N.Czencowa oraz I.M.Jagłoma, w języku rosyjskim, wydanej w Moskwie już po wojnie. O Szklarskim (1918 – 1942) pozostali autorzy piszą, że był wspaniałym matematykiem dydaktykiem, zginął walcząc w obronie swej ojczyzny z Niemcami (przez trzy tygodnie walczył o przyjęcie do oddziałów walczących z Niemcami, choć pracował i dalej miał pracować w instytucji naukowej i wcale nie chciano go wysyłać na front), w pisaniu książki już udziału nie brał, jednak zostały użyte jego notatki, jego wkład w działalność kółka matematycznego dla uczniów szkół średnich przy Moskiewskim Uniwersytecie Państwowym im. M.Łomonosowa był bardzo duży, więc występuje na liście autorów tej i dwu innych książek z zadaniami jako pierwszy.

I jeszcze coś o dokładności, z okazji Dnia Dziecka.

We posed this question to the director and chief engineer for NASA's Dawn mission, Marc Rayman. Here's what he said:

Thank you for your question! This isn't the first time I've heard a question like this. In fact, it was posed many years ago by a sixth-grade science and space enthusiast who was later fortunate enough to earn a doctorate in physics and become involved in space exploration. His name was Marc Rayman.

To start, let me answer your question directly. For Jet Propulsion Laboratory's highest accuracy calculations, which are for interplanetary navigation, we use 3.141592653589793. Let's look at this a little more closely to understand why we don't use more decimal places. I think we can even see that there are no physically realistic calculations scientists ever perform for which it is necessary to include nearly as many decimal points as you present. Consider these examples:

1. The most distant spacecraft from Earth is Voyager 1. It is about 12.5 billion miles away. Let's say we have a circle with a radius of exactly that size (or 25 billion miles in diameter) and

we want to calculate the circumference, which is pi times the radius times 2. Using pi rounded to the 15th decimal, as I gave above, that comes out to a little more than 78 billion miles. We don't need to be concerned here with exactly what the value is (you can multiply it out if you like) but rather what the error in the value is by not using more digits of pi. In other words, by cutting pi off at the 15th decimal point, we would calculate a circumference for that circle that is very slightly off. It turns out that our calculated circumference of the 25 billion mile diameter circle would be wrong by 1.5 inches. Think about that. We have a circle more than 78 billion miles around, and our calculation of that distance would be off by perhaps less than the length of your little finger.

2. We can bring this down to home with our planet Earth. It is 7,926 miles in diameter at the equator. The circumference then is 24,900 miles. That's how far you would travel if you circumnavigated the globe (and didn't worry about hills, valleys, obstacles like buildings, rest stops, waves on the ocean, etc.). How far off would your odometer be if you used the limited version of pi above? It would be off by the size of a molecule. There are many different kinds of molecules, of course, so they span a wide range of sizes, but I hope this gives you an idea. Another way to view this is that your error by not using more digits of pi would be 10,000 times thinner than a hair!

3. Let's go to the largest size there is: the visible universe. The radius of the universe is about 46 billion light years. Now let me ask a different question: How many digits of pi would we need to calculate the circumference of a circle with a radius of 46 billion light years to an accuracy equal to the diameter of a hydrogen atom (the simplest atom)? The answer is that you would need 39 or 40 decimal places. If you think about how fantastically vast the universe is — truly far beyond what we can conceive, and certainly far, far, far beyond what you can see with your eyes even on the darkest, most beautiful, star-filled night — and think about how incredibly tiny a single atom is, you can see that we would not need to use many digits of pi to cover the entire range.