Rozwiązania zadań z kolokwium z 5 kwietnia 2018

Tekst świeżutki, więc zapewne zawiera jakieś błędy, choć starałem się ich unikać.

Zadanie 1. Zbadać jednostajną ciągłość funkcji
$$f(x) = (e^x - 1)\sin\frac{1}{5^x - 1}$$
na zbiorach $A = (0, 2018)$ i $B = (0, \infty)$.

Rozwiązanie. Mamy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, bo $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$ oraz $|\sin(\ldots)| \leqslant 1$. Zachodzi też równość
$$\lim_{x\to\infty}(e^x - 1)\sin\frac{1}{5^x - 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - 1}{5^x - 1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{5^x-1}}{\frac{1}{5^x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{e}{5})^x - 5^{-x}}{1 - 5^{-x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{5^x-1}}{\frac{1}{5^x-1}} = \frac{0-0}{1-0}\cdot 1 = 0\,.$$
Ponieważ funkcja ma skończone granice zarówno w lewym jak i w prawym końcu przedziału $(0, \infty)$, więc jest na nim jednostajnie ciągła – fakt znany z ćwiczeń i zadań domowych. Ponieważ $(0, \infty) \supset (0, 2018)$, więc funkcja ta jest też jednostajnie ciągła na przedziale $(0, 2018)$. $\Box$

Zadanie 2. Dowieść, że jeśli $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$, to
$$3\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2\beta\,\mathrm{tg}\,\beta + \gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma \geqslant (3\alpha + 2\beta + \gamma)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\alpha + 2\beta + \gamma}{6}\right).$$
Dla jakich α, β, γ zachodzi równość?

Rozwiązanie. Niech $f(x) = x\,\mathrm{tg}\,x$. Mamy $f'(x) = (x\,\mathrm{tg}\,x)' = \mathrm{tg}\,x + x(1 + \mathrm{tg}^2\,x)$. Na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ funkcje x oraz $\mathrm{tg}\,x$ są ściśle rosnące i dodatnie w jego wnętrzu, więc funkcja $f'(x)$ też jest ściśle rosnąca, a to oznacza, że funkcja f jest ściśle wypukła. Wynika stąd i z nierówności Jensena, że
$$\tfrac{1}{6}\left(3\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2\beta\,\mathrm{tg}\,\beta + \gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma\right) = \tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + \tfrac{1}{3}\beta\,\mathrm{tg}\,\beta + \tfrac{1}{6}\gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma \geqslant$$
$$\geqslant \left(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{6}\gamma\right)\mathrm{tg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{6}\gamma\right) = \tfrac{3\alpha+2\beta+\gamma}{6}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{3\alpha+2\beta+\gamma}{6},$$
co kończy dowód nierówności. Ze ścisłej wypukłości funkcji f wynika, że nierówność ta jest ostra dla każdej trójki α, β, γ z wyjątkiem trójek, w których $\alpha = \beta = \gamma$. $\Box$

Drugi sposób. Skorzystamy ze ścisłej wypukłości funkcji tangens na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$, która wynika z tego, że jej pochodna $(\mathrm{tg}\,x)' = 1 + \mathrm{tg}^2\,x$ jest funkcją ściśle rosnącą na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$. Jeśli $\alpha = \beta = \gamma = 0$, to obie strony są zerami, więc zachodzi równość. Jeśli co najmniej jedna z liczb α, β, γ jest różna od zera, to $3\alpha + 2\beta + \gamma > 0$ i dowodzoną nierówność można podzielić przez $3\alpha + 2\beta + \gamma$. Z nierówności Jensena wnioskujemy, że
$\frac{3\alpha}{3\alpha+2\beta+\gamma}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{2\beta}{3\alpha+2\beta+\gamma}\,\mathrm{tg}\,\beta + \frac{\gamma}{3\alpha+2\beta+\gamma}\,\mathrm{tg}\,\gamma \geqslant \mathrm{tg}\,\frac{3\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2}{3\alpha+2\beta+\gamma} \geqslant \mathrm{tg}\,\frac{3\alpha+2\beta+\gamma}{6}$ – ostatnia nierówność wynika z tego, że tangens jest ściśle rosnący na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$ i tego, że
$$\tfrac{3\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2}{3\alpha+2\beta+\gamma} - \tfrac{3\alpha+2\beta+\gamma}{6} = \tfrac{1}{6(3\alpha+2\beta+\gamma)}\big(6(3\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2) - (3\alpha + 2\beta + \gamma)^2\big) =$$
$$= \tfrac{1}{6(3\alpha+2\beta+\gamma)}\big(9\alpha^2+8\beta^2+5\gamma^2-12\alpha\beta-6\alpha\gamma-4\beta\gamma\big) = \tfrac{1}{6(3\alpha+2\beta+\gamma)}\big((3\alpha - 2\beta - \gamma)^2 + 4(\beta - \gamma)^2\big) \geqslant 0.$$
Jasne jest, że ostatnia nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = \gamma$ i jednocześnie $3\alpha - 2\beta - \gamma = 0$, więc wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta = \gamma$. Stąd natychmiast wynika, że $3\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2\beta\,\mathrm{tg}\,\beta + \gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma \geqslant (3\alpha + 2\beta + \gamma)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\alpha+2\beta+\gamma}{6}\right)$, przy czym nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta = \gamma$. $\Box$

Uwaga. Ostatni fragment można nieco uprościć, ale celowo pokazałem rozwiązanie w oparciu o sprowadzenie trójmianu kwadratowego (zmiennej α) do postaci kanonicznej, bo ta metoda jest prosta, ale jednak bardzo ważna.

Zadanie 3. Wyznaczyć kres dolny i kres górny funkcji $f(x) = x\left(1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$.

Rozwiązanie. Mamy $f(x) = x\left(1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) = x\frac{1-\frac{x}{x+1}}{1+\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = \frac{x}{x+1+\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$, więc f jest funkcją ściśle rosnącą na półprostej $(0,\infty)$. Kres dolny to wobec tego $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{1+\infty+\sqrt{1+\infty}} = 0$, a górny to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{1+0+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$. $\square$

Uwaga. Można oczywiście obliczyć pochodną i przekonać się, że jest ona dodatnia na półprostej $(0,\infty)$, co prowadzi oczywiście do tych samych wyników.

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych a i b, dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\cos x & \text{dla } x \geqslant 0, \\ \frac{1-\cos x}{x\sin x} & \text{dla } x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi,\infty)$.

Rozwiązanie. Funkcja jest różniczkowalna w każdym punkcie półprostej $(-\pi,\infty)$ z wyjątkiem punktu 0, w którym może nie być nawet ciągła. Jest prawostronnie ciągła niezależnie oda, b oraz $f(0) = b$, więc jest ciągła w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy

$$b = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

f jest prawostronnie różniczkowalna w punkcie 0 i $f'_+(0) = a - b\sin 0 = a$. Jest ona różniczkowalna w punkcie 0 wtedy i tylko wtedy, gdy (reguła de l'Hospitala dwukrotnie)
$a = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2(1-\cos x)-x\sin x}{2x^2\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2-2\cos x - x\sin x}{2x^3}\cdot \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin x} =$
$= \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2-2\cos x-x\sin x}{2x^3} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x\cos x}{6x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x\sin x}{12x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{12} = 0.$
Wynika stąd, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 0, to $a = 0$ i $b = \frac{1}{2}$ oraz że w tym wypadku funkcja f rzeczywiście jest różniczkowalna w punkcie 0.

Zadanie 5. Niech f będzie jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$ i różniczkowalna. Wykazać, że jeśli pochodna funkcji f, funkcja $f'\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest **nie**ograniczona, to nie jest ona jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Bez straty ogólności można założyć, że istnieje taki ciąg (x_n), że

$$f'(x_{n+1}) > f'(x_n) + 1 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{i} \quad f'(x_1) > 1,$$

bo f' jest nieograniczona — w razie potrzeby można zastąpić funkcję f przez $-f$. Oczywiście $f'(x_n) > n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Załóżmy, że f' jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. Istnieje wtedy taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|x-y| < \delta$, to $|f'(x) - f'(y)| < 1$. Jeśli więc $|x_n - y| < \delta$, to $f'(y) > n$. Niech $y_n \in \left(x_n + \frac{\delta}{2n}, x_n + \frac{\delta}{n}\right)$. Oczywiście $\frac{\delta}{2n} < y_n - x_n < \frac{\delta}{n}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że

$$f(y_n) - f(x_n) = f'(c_n)(y_n - x_n) > f'(c_n)\cdot\frac{\delta}{2n} > \frac{\delta}{2}$$

dla pewnej liczby $c_n \in (x_n, y_n)$. Przeczy to jednostajnej ciągłości funkcji f. Doszliśmy do sprzeczności z założeniami. Wobec tego f' nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. $\square$

Uwaga. Nie wiemy za dużo na temat ciągu (x_n). Teoretycznie mógłby być ograniczony, bo założenia dowodzonego twierdzenia spełnia m.in. funkcja zdefiniowana wzorami $f(0) = 0$ oraz $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}\sin\frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$, co każda osoba czytająca ten tekst, może sprawdzić bez trudności. Nie przeszkadza nam to zupełnie, choć mogłoby zdarzyć się, że niektóre z liczb $y_1, y_2, \ldots$ powtarzają się.