Była kartkówka z rozwiązanego w czasie ćwiczeń zadania ...

$I_a(b)=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ dla $a>0$. Przypomnijmy, że $\left|\frac{\sin t}{t}\right|\leqslant 1$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$.

Mamy

$$\left|e^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\right|=\left|e^{-ax}\frac{\sin(bx)}{bx}b\right|\leqslant |b|e^{-ax}, \tag{0}$$

więc zachodzi nierówność

$$\int_0^\infty\left|e^{-ax}\frac{\sin(bx)}{x}\right|\mathrm{d}x\leqslant |b|\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x=\frac{|b|}{a}<\infty, \tag{1}$$

zatem całka jest bezwzględnie zbieżna (tym bardziej zbieżna) dla każdej liczby $a>0$.

Jeśli $\varepsilon>0$, $h\neq 0$ i $e^{-ac}<\frac{a\varepsilon}{3}$, to na mocy (0) i nierówności $|\sin\alpha-\sin\beta|\leqslant|\alpha-\beta|$ mamy

$$\left|\frac{1}{h}\left(\int_c^\infty e^{-ax}\cdot\frac{\sin((b+h)x)}{x}-\int_c^\infty e^{-ax}\cdot\frac{\sin(bx)}{x}\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_c^\infty e^{-ax}\left|\frac{\sin((b+h)x)-\sin(bx)}{hx}\right|\mathrm{d}x=\int_c^\infty e^{-ax}=\frac{e^{-ac}}{a}<\frac{\varepsilon}{3}$$

Zachodzą łatwe do dowodu nierówności $|\sin\alpha-\alpha|\leqslant\frac{|\alpha|^3}{6}$ oraz $|\cos(\beta+\alpha)-\cos\beta|\leqslant|\alpha|$. Z nich wynika, że

$$\left|\frac{\sin((b+h)x)-\sin(bx)}{hx}-\cos(bx)\right|=\left|\frac{2\sin\frac{hx}{2}\cos(bx+\frac{hx}{2})}{hx}-\cos(bx)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\cos(bx+\tfrac{hx}{2})-\cos(bx)\right|+\left|\frac{\sin\frac{hx}{2}}{\frac{hx}{2}}-1\right|\cdot|\cos(bx)|\leqslant\left|\frac{hx}{2}\right|+\left|\frac{(hx)^2}{24}\right|.$$

Wobec tego, jeśli $0\leqslant x\leqslant c$, $0<|h|<1$, to

$$\left|e^{-ax}\cdot\frac{\sin((b+h)x)-\sin(bx)}{hx}-e^{-ax}\cdot\cos(bx)\right|\leqslant|h|\left(\frac{c}{2}+\frac{c^2}{24}\right)=|h|\left(\frac{12c+c^2}{24}\right).$$

Wynika stąd, że jeśli $e^{-ac}<\frac{a\varepsilon}{3}$ i $0<|h|<\frac{8\varepsilon}{12c^2+c^3}$, to

$$\left|\int_0^\infty e^{-ax}\cdot\frac{\sin((b+h)x)-\sin(bx)}{hx}\,\mathrm{d}x-\int_0^\infty e^{-ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_0^c e^{-ax}\cdot\left(\frac{\sin((b+h)x)-\sin(bx)}{hx}-\cos(bx)\right)\mathrm{d}x\right|+$$
$$+\left|\int_c^\infty e^{-ax}\cdot\left(\frac{\sin((b+h)x)-\sin(bx)}{hx}\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_c^\infty e^{-ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Z otrzymanych stwierdzeń, definicji pochodnej i definicji granicy funkcji wynika od razu, że $I_a(b)=\int_0^\infty e^{-ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, więc że można **w tym wypadku** różniczkować pod znakiem całki.

Uwaga. Mamy $\left(\sin\alpha-\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}\right)\right)'=\cos\alpha-1+\frac{\alpha^2}{2}$, więc $\left(\sin\alpha-\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}\right)\right)''=-\sin\alpha+\alpha>0$ dla $\alpha>0$, zatem funkcja $\cos\alpha-1+\frac{\alpha^2}{2}$ rośnie na półprostej $[0,\infty)$ i wobec tego jeśli $\alpha>0$, to $\cos\alpha-1+\frac{\alpha^2}{2}>0$. Stąd wynika, że funkcja $\sin\alpha-\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}\right)$ rośnie na półprostej $[0,\infty)$, a ponieważ zeruje się w zerze, więc jest dodatnia na półprostej $(0,\infty)$. Wobec tego dla każdego $\alpha\neq 0$ zachodzi nierówność $|\alpha-\sin\alpha|<\frac{\alpha^3}{6}$.

Nierówność $|\cos(\beta+\alpha)-\cos\beta|\leqslant|\alpha|$ wynika natychmiast z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej i tego, że $|\sin t|\leqslant|t|$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$.