Kilka zadań, o których warto pomyśleć

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy funkcji wiedząc, że pole obszaru $\{(x,y)\colon \quad a \leqslant x \leqslant b \text{ i } f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ jest równe $\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x$:

a. $f(x)=x^2$ i $g(x)=\frac{1}{2}x^2+2$,
b. $f(x)=x^2$ i $g(x)=-x^2$ oraz proste $x=-1$, $x=1$,
c. $f(x)=x^2$ i $g(x)=1-x^2$,
d. $f(x)=x^2$, $g(x)=1-x^2$ i $h(x)=2$,
e. $f(x)=x^2$ i $g(x)=x^2-2x+4$ oraz oś OY,
f. $f(x)=\sqrt{x}$ i $g(x)=0$ oraz prostą $x=2$,
g. $f(x)=x^2$ oraz parabolę $x=y^2$,
h. $f(x)=x\sin 4x$ i $g(x)=0$ oraz proste $x=0$ i $x=\frac{\pi}{8}$,
i. $F(y)=\frac{1}{2}y^2$ i okręgiem o równaniu $x^2+y^2-4x=0$.

2. Niech $x^2-y^2=1$, $x>0$, $y\geqslant 0$. Dowieść, że istnieje takie $t\in\mathbb{R}$, że $x=\cosh t=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ i $y=\sinh t=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$. Niech $A=\{(u,v)\colon \quad u^2-v^2\leqslant 1, |vx|\leqslant uy\}$.
Udowodnić, że pole zbioru A równe jest t.
Uwaga. Jeśli $x>-1$, $y\geqslant 0$ i $x^2+y^2=1$, to istnieje dokładnie jedna liczba $t\in[0,\pi)$, że $x=\cos t$, $y=\sin t$. Jeżeli $A=\{(t\cos\tau, t\sin\tau)\colon \quad t\leqslant 1,\ |\tau|\leqslant t\}$, to $|A|=t$. Ta uwaga pokazuje geometryczne podobieństwo definicji sinusa i kosinusa oraz sinusa hiperbolicznego i kosinusa hiperbolicznego.

3. Porównać całki nie obliczając ich:

a. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^6 x\ \mathrm{d}x$ i $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^3 x\ \mathrm{d}x$,

b. $\int_0^1 e^{-x}\ \mathrm{d}x$ i $\int_0^1 e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$.

4. Obliczyć objętość elipsoidy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$. Przyjąć, że objętość to całka z pola przekroju płaszczyzną prostopadłą do osi.

5. Obliczyć długość krzywej o równaniu: $y^2=4x^3$, przy czym $y\geqslant 0$, $\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{8}{9}$ przyjmując, że długość wykresu funkcji f określonej na $[a,b]$ to całka $\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

6. Obliczyć długość krzywej o równaniu $y=2\sqrt{x}$, przy czym $1\leqslant x\leqslant 9$. Długość zdefiniowana w poprzednim zadaniu.

7. Określić znak całki

a. $\int_0^{2\pi} x\sin x\ \mathrm{d}x$, **b.** $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln x\ \mathrm{d}x$,

c. $\int_{-2}^2 x^3 2^x\ \mathrm{d}x$, **d.** $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$.

8. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ obliczając pewną całkę, jeśli $a_n=$

(a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\frac{1}{n+n}$, (b) $\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$,

(c) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, (d) $\frac{1^7+2^7+\cdots+n^7}{n^8}$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\sin\frac{\pi}{n^2}+\frac{n+2}{n}\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2}\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{(nx+j)(nx+j+1)}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e^{1/n}}{n+1}+\frac{e^{2/n}}{n+1/2}+\cdots+\frac{e^{n/n}}{n+1/n}\right)$

9. Znaleźć pochodną funkcji f, jeśli $f(x) =$
a. $\int_1^{x+1} e^{t^2}\, \mathrm{d}t$, **b.** $\int_1^{x^2} e^{t^2}\, \mathrm{d}t$, **c.** $\int_{x-1}^{1} e^{t^2}\, \mathrm{d}t$, **d.** $\int_{x-1}^{x^2} e^{t^2}\, \mathrm{d}t$.

10. Niech $f(x) = 1$, gdy $x \in \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = 0$, gdy $x \notin \mathbb{Q}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Jeśli istnieje, obliczyć.

11. Niech $f(x) = \frac{1}{q}$, gdy $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geqslant 1$ i $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$ oraz $f(x) = 0$, gdy $x \notin \mathbb{Q}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Jeśli istnieje, obliczyć.

12. Niech $f(x) = \frac{1}{n}$, gdy $\frac{1}{n+2} < x \leqslant \frac{1}{n+1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $f(x) = 0$, gdy $x \notin (0, \frac{1}{2}]$. Rozstrzygnąć, czy istnieje $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Jeśli istnieje, obliczyć.

13. Wykazać, że złożenie funkcji całkowalnych w sensie Riemanna nie musi być funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Czy wystarczy dodatkowo założyć, że funkcja wewnętrzna jest ciągła? Czy wystarczy dodatkowo założyć, że funkcja zewnętrzna jest ciągła?

14. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$. Można zacząć od funkcji klasy C^1.

15. Wykazać, że jeśli dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość $\int_0^1 f(x)x^n\,\mathrm{d}x = 0$, to funkcja f jest równa 0 prawie wszędzie.

16. Wykazać, że jeśli f jest nieujemną funkcją niemalejącą, wklęsłą, klasy C^2 na półprostej $[1, \infty)$, to ciąg $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$ o wyrazie $\displaystyle a_k = \sum_{n=1}^{k} f(n) - \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f(k)$ jest ograniczony.